TS 2 -interro primitives/intégrales : Eléments de correction

Exercice 1 :

a) $F(x)=8\times\dfrac{x^6}{6}-4\times\dfrac{x^4}{4}+3\times\dfrac{x^2}{2}-7x=\boxed{\dfrac{4}{3}x^6-x^4+\dfrac{3}{2}x-7x}$

b) ***type*** $u'u^n$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2x\times\left(x^2+5\right)^3$ $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\left(x^2+5\right)^4}{4}=\boxed{\dfrac{\left(x^2+5\right)^4}{8}}$

c) ***type*** $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $\quad f(x)=2\times\dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}$ donc $F(x)=2\times 2\sqrt{2x^2+1}=\boxed{4\sqrt{2x^2+1}}$

d) ***type*** $u'e^u$ donc $F(x)=\boxed{e^{x^3-4}}$

e) ***type*** $u-5\times\dfrac{1}{v^2}$ donc $F(x)=4\times\dfrac{x^2}{2}-9x-5\times\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)=\boxed{2x^2-9x+\dfrac{5}{x+2}}$

Exercice 2 :

type $u'e^u$ $\quad f(x)=2\times 2xe^{x^2}$ donc $F(x)=2e^{x^2}+C\quad\left(C\in\mathbb{R}\right)$

or $F(0)=1=2e^{0^2}+C$ soit $C=-1$ Donc $\boxed{F(x)=2e^{x^2}-1}$

Exercice 3 :

a)

$$\int_4^{12}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_4^{12}\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2x+1}}dx\,dx=\left[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2x+1}\right]_4^{12}=\left(\sqrt{2\times 12+1}\right)-\left(\sqrt{2\times 4+1}\right)=2$$

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{3u^2+1}{\left(u^3+u-4\right)^2}du=\left[-\frac{1}{u^3+u-4}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{1^3+1-4}\right)-\left(-\frac{1}{0^3+0-4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$

Exercice 4 :

1. $f<0$ sur [0 ; 1] donc $A_1=\displaystyle\int_0^1-f(x)dx$ u.a $=\displaystyle\int_1^0 f(x)dx$ u.a

$A_1=\displaystyle\int_1^0 f(x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-2x^2\right]_1^0=(0)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{3}-2\right)=\frac{7}{12}$ u.a

Or 1 u.a = $2\times 2=4$ cm² donc $A_1=4\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{3}$ cm²

2. f > 0 sur [1 ; 4] donc $A_2 = \int_1^4 f(x)dx$ u.a

$$A_2 = \int_1^4 f(x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2\right]_1^4 = \left(-\frac{4^4}{4} + \frac{5\times 4^3}{3} - 2\times 4^2\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - 2\right) = \frac{32}{3} - \left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{45}{4} \text{ u.a}$$

Or 1 u.a = $2\times 2 = 4$ cm² donc $A_2 = 4\times\frac{45}{4} = 45$ cm²

<u>Exercice 5 :</u>

L'aire du domaine hachuré est égale à $\int_3^6 [f(x) - g(x)]dx$ u.a

$$\int_3^6 [f(x) - g(x)]dx = \int_3^6 \left(3 - (x-4)^2 - (5-x)\right)dx$$

$$\int_3^6 \left(-x^2 + 9x - 18\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}x^2 - 18x\right]_3^6$$

$$= (-18) - (-22,5) = 4,5 \text{ u.a}$$