Mathématiques

Cité Scolaire Gambetta

Année scolaire 2019-2020

Devoir surveillé 4

Terminale S1 - Mercredi 18 Décembre – 2h – Calculatrice autorisée

Exercice 1 : ***Les deux parties A et B sont indépendantes.***

À partir de 2017, une association d'aide à la recherche médicale envoie chaque année à Monsieur X un courrier pour l'inviter à l'aider financièrement par un don.
Monsieur X a répondu favorablement en 2017 en envoyant un don.

Chaque année à partir de 2018, on admet que :

- Si Monsieur X a fait un don une année, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don l'année suivante est égale à 0,9 ;
- Si Monsieur X n'a pas fait de don une année, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don l'année suivante est égale à 0,4.

On note, pour tout entier naturel *n*, E_n l'évènement : « Monsieur X a fait un don en 2018 + *n* » et p_n la probabilité de l'événement E_n soit $p_n = p\left(E_n\right)$. Ainsi, on a $p_0 = 0,9$.

Partie A

1. Modéliser la situation étudiée pour les années 2018 et 2019 à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements E_0 et E_1.
2. Déterminer la probabilité que Monsieur X a fait un don en 2018 et en 2019.
3. Démontrer que la probabilité que Monsieur X a fait un don en 2019 est égale à 0,85.
4. Sachant que Monsieur X a fait un don en 2019, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas fait de don en 2018 ? (*On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près*)

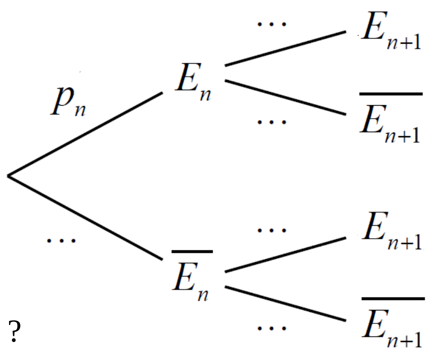
Partie B

1.

a. Pour tout entier *n*, compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

b. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

c. Quelle est la probabilité que Monsieur X soit donateur en 2025 ?



2. On définit, pour tout entier *n*, la suite $\left(u_n\right)$ telle que $u_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de raison 0,5. Préciser son 1$^{\text{er}}$ terme.

b. Exprimer $\left(u_n\right)$ en fonction de *n*. En déduire que $p_n = 0,1 \times 0,5^n + 0,8$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite $\left(p_n\right)$. Justifier.

d. Déterminer, en justifiant votre réponse, la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

<u>Exercice 2 :</u>

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Simplifier les expressions suivantes : $A=\dfrac{e^{2(x+3)}}{e^{4-3x}}$ et $B=e^{x-2}\times\left(e^{3x}\right)^2\times e$

2. Calculer les limites suivantes :

a. $f(x)=(7-3x)e^x$ en $+\infty$ et en $-\infty$

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=(2x-1)e^x$ $g(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$ $h(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

<u>Exercice 3 :</u>

Soit $P(x)=4x^3+3x^2-2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Partie A

1. Etudier les limites de P en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Déterminer les variations de P et dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe C_f ?

2. Déterminer les limites de f en -1^- et en -1^+.

Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe C_f ?

3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

Dresser alors le tableau complet des variations de *f*.

4. <u>BONUS :</u>

Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2}{3\alpha^2}$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,2.