TS1 – Devoir Surveillé n° 1 : Eléments de correction

Exercice 1

Partie A

1. $P(-i)=(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i-8+17i=0$

2. $(z+i)(z^2-8z+17)=z^3-8z^2+17z+iz^2-8iz+17i=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=P(z)$

3.

$P(z)=0\Leftrightarrow(z+i)(z^2-8z+17)=0\Leftrightarrow z+i=0$ ou $z^2-8z+17=0$

$\Leftrightarrow z=-i$ ou $\Delta=-4<0$

$\Leftrightarrow z=-i$ ou $z_1=\dfrac{8+i\sqrt{4}}{2}=4+i$ ou $z_2=\dfrac{8-i\sqrt{4}}{2}=4-i$

Donc $S=\{-i;4-i;4+i\}$

Exercice 2 :

1. $z_{A'}=(2-3i)(2+3i)+1-4i=4+9+1-4i=14-4i$ Donc A' a pour affixe 14 – 4i

2. Il faut résoudre l'équation $(2-3i)z+1-4i=7$

$(2-3i)z+1-4i=7\Leftrightarrow(2-3i)z=6+4i\Leftrightarrow z=\dfrac{6+4i}{2-3i}=\ldots=2i$

Donc le point B a pour affixe 2i.

3. Il faut résoudre l'équation $(2-3i)z+1-4i=z$

$(2-3i)z+1-4i=z\Leftrightarrow(1-3i)z=-1+4i\Leftrightarrow z=\dfrac{-1+4i}{1-3i}=\ldots=\dfrac{-13+i}{10}$

Donc le point invariant C a pour affixe $\dfrac{-13+i}{10}$.

Exercice 3 :

1. FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$" or $u_n=\dfrac{n^2-1}{1-n}=\dfrac{n^{\cancel{2}}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)}=\dfrac{n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}-1\right)}$ Or

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)=-1\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=1\end{array}\right\}\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}(3-n^2)=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-2\end{array}\right\}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

3. FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$" or $u_n=\dfrac{3+5n-4n^2}{2n^2+1}=\dfrac{\cancel{n^2}\left(\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n}-4\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n}-4}{2+\dfrac{1}{n^2}}$ Or

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n}-4\right)=-4\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2\end{array}\right\}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$$

Exercice 4 :

1.

$-1\le\cos n\le1\Leftrightarrow-2\le2\cos n\le2\Leftrightarrow n^2-2\le n^2+2\cos n\le n^2+2$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{n^2-2}\ge\dfrac{1}{n^2+2\cos n}\ge\dfrac{1}{n^2+2}\Leftrightarrow\dfrac{n^2}{n^2-2}\ge\dfrac{n^2}{n^2+2\cos n}\ge\dfrac{n^2}{n^2+2}\Leftrightarrow\dfrac{n^2}{n^2-2}\ge u_n\ge\dfrac{n^2}{n^2+2}$

2. $\dfrac{n^2}{n^2-2}=\dfrac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{n^2}}$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2-2}=1$

De même, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+2}=1$. D'après le théorème des gendarmes, on conclut $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 5

1. $(P_n): 0\le u_n\le 1$

Amorce :

$u_0=\dfrac{1}{2}$ on a bien $0\le u_0\le 1$ donc (P_0) vraie

Hérédité

On suppose (P_n) vraie pour un rang *n*, montrons que (P_{n+1}) est vraie soit $0\le u_{n+1}\le 1$

On a $0\le u_n\le 1 \Leftrightarrow 1\le u_n+1\le 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le\dfrac{u_n+1}{2}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{2}}\le\sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}}\le\sqrt{1}\Leftrightarrow 0\le\sqrt{\dfrac{1}{2}}\le u_{n+1}\le 1$

donc (P_{n+1}) est vraie. Par récurrence, on a donc prouvé l'encadrement pour tout entier *n*.

Exercice 6 :

1.

Chaque année $\frac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

On en déduit que : $v_1=v_0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+400=5\,000\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+400=4150$.

De même : $v_2=v_1\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+400=4150\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+400=3512{,}5\approx 3513$.

2.

Chaque année $\frac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_n\times\left(1-\frac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

$v_{n+1}=v_n\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+400$.

Ainsi : $v_{n+1}=0{,}75v_n+400$.

3.

a. $w_{n+1}=v_{n+1}-1600=0{,}75v_n+400-1600=0{,}75v_n-1200=0{,}75(v_n-1600)=0{,}75w_n$.
(w_n) est géométrique de raison $q=0{,}75$ et de premier terme : $w_0=v_0-1\,600=5\,000-1600=3400$.

b. (w_n) étant géométrique de premier terme $w_0=3400$, son terme général vaut :
$w_n=w_0\times q^n$, ainsi $w_n=3400\times 0{,}75^n$.

c. Comme : $w_n=v_n-1600\Rightarrow v_n=w_n+1600$.
Ainsi : $v_n=1600+3400\times 0{,}75^n$.

d. $v_n=a_n+b_n\times c_n$ avec :

- $a_n=1600$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1600$
- $b_n=3400$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=3400$
- $c_n=0{,}75^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0^+$, car c_n est de la forme q^n avec $q\in]0\,;1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1600$. Ceci signifie qu'à terme la population de singes va se rapprocher de 1600. On a par exemple $v_{20}\approx 1611$.

4. A l'aide de la calculatrice, on obtient

n	$\mathbf{u_n}$
20	1610,7
21	1608

Le rang du 1er terme de (v_n) qui est inférieur à 1610 est n = 21.