Mathématiques

Cité Scolaire
Gambetta

Année scolaire
2019-2020

Devoir surveillé 1

Terminale S1 - Mercredi 2 octobre – 2h – Calculatrice autorisée

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme : $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

1. Calculer $P(-i)$.(*Vous écrirez le détail des calculs*)
2. Démontrer que $P(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$.
3. Résoudre alors l'équation $P(z)=0$

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=(2-3i)z+1-4i$

1. On note A le point d'affixe $2+3i$.

   Déterminer l'affixe du point A' associé au point A.

2. Soit B' le point d'affixe 7.

   Déterminer l'affixe du point B auquel est associé le point B'.

3. Déterminer l'affixe du point invariant C. Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n=\dfrac{n^2-1}{1-n}$
2. $u_n=(3-n^2)\left(\dfrac{1}{n}-2\right)$
3. $u_n=\dfrac{3+5n-4n^2}{2n^2+1}$

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) telle que $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+2\cos n}$ pour tout entier naturel *n*.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $\dfrac{n^2}{n^2+2}\leq u_n\leq\dfrac{n^2}{n^2-2}$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier *n*, par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 6 :

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Au 1er janvier 2014, une étude a montré que la population de cette race de singes ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. A partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

Pour tout entier naturel *n*, le terme v_n de la suite (v_n) représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2014 + *n*. On a ainsi $v_0 = 5000$

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Justifier que pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} = 0,75v_n + 400$.
3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - 1600$.
   a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier *n*, exprimer w_n en fonction de *n*.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
   d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

4. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.

```
VARIABLES :
    V réel , N entier
INITIALISATION :
    V ← 5 000
    N ← 0
TRAITEMENT :
    Tant que V > 1 610
        V ← V × 0,75 + 400
        N ← N +1
    Fin du Tant que
SORTIE :
    Afficher N
```

À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.