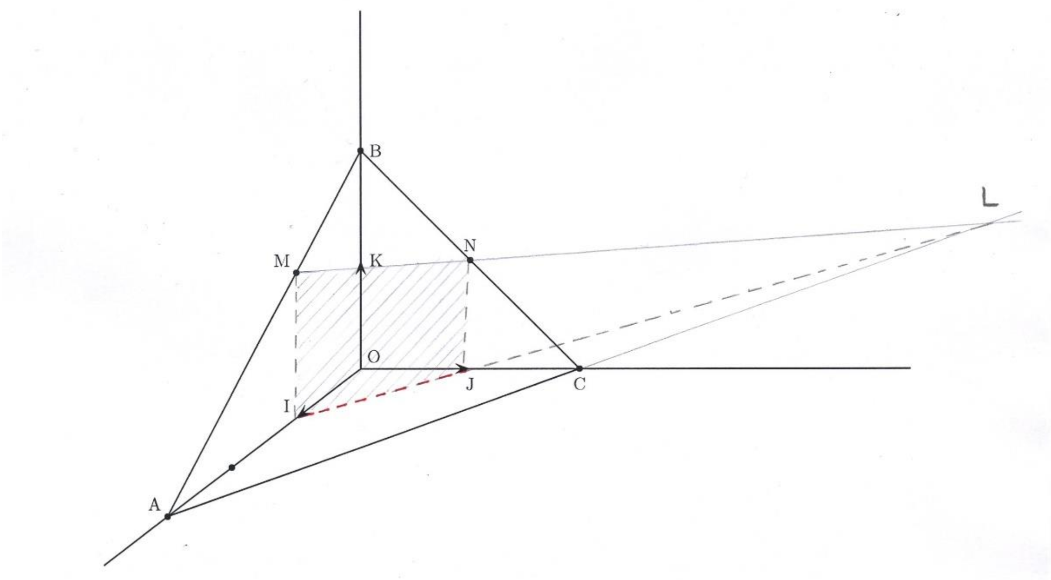
Correction DM 5

Exercice 1

Partie A

1. Les points M, N, A et C sont coplanaires. De plus, N est le milieu de [BC] et M est tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ donc les droites (MN) et (AC) ne sont pas parallèles et, par conséquent, elles sont sécantes en un point L.

2. et **3.** Voir ci-dessous



Partie B

1. $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\times 3=1 \\ y=\frac{1}{3}\times 0=0 \\ z-2=\frac{1}{3}\times(-2)=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$ donc $M\left(1;0;\frac{4}{3}\right)$

N milieu de [BC] donc $N\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2};\frac{z_B+z_C}{2}\right)$ alors $N(0;1;1)$

2. La droite (AC) passe par $A(3;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}(-3;2;0)$ donc

$$(AC)\ \begin{cases} x=3-3t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

3. Le point d'intersection L vérifie les équations des droites (AC) et (MN) soit

$$\begin{cases} 1-s=3-3t \\ s=2t \\ \frac{4}{3}-\frac{s}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=4 \\ t=2 \end{cases}$$

donc les droites (AC) et (MN) sont sécantes au point L $(3-3\times 2;2\times 2;0)$ soit $L(-3;4;0)$

4. On a $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $L(-3;4;0)$

Les points I, J et L sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{IL}(-4;4;0)$ sont colinéaires.

On constate que $\overrightarrow{IL}=4\overrightarrow{IJ}$ Alors les 3 points I, J et L sont alignés.

Exercice 2

1. a. $f(20) \simeq 0{,}031$.

b. $f(1{,}75) \simeq 0{,}697$; le taux maximal est d'environ 69,7%.

2. a. Sur $[1{,}75;20]$, f est continue, strictement croissante à valeurs dans environ $[0{,}697;0{,}031]$;

Or $0{,}035 \in [0{,}697;0{,}031]$;

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = 0{,}035$ admet une unique solution $T \in [1{,}75;20]$.

Sur $[0;1{,}75]$, le minimum est 0,23 donc l'équation précédente n'y a pas de solution.

2. b. A la sortie de l'algorithme, on a t = 15,75.

Cela signifie qu'à partir de 15,75 minutes (15 min 45 s), le taux repasse sous les 3,5%.

3.a. Pour tout t, $F'(t) = -1{,}6e^{-0{,}5t} + (-1{,}6t - 3{,}6) \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} + 0{,}03$

$F'(t) = (-1{,}6 + 0{,}8t + 1{,}8)e^{-0{,}5t} + 0{,}03 = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03 = f(t)$

Donc F est bien une primitive de f.

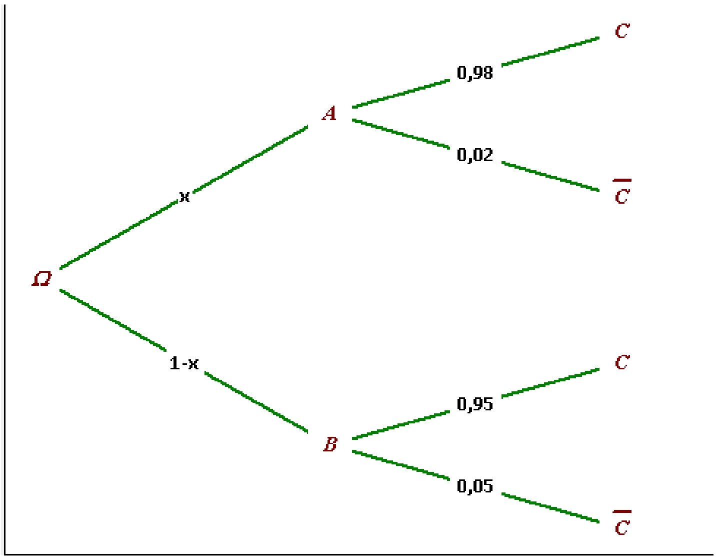
3.b. $V_m = \dfrac{1}{11}\displaystyle\int_0^{11} f(t)dt = \dfrac{F(11) - F(0)}{11}$

Donc $V_m = \dfrac{(-1{,}6 \times 11 - 3{,}6)e^{-0{,}5 \times 11} + 0{,}03 \times 11 - (-3{,}6)}{11} \simeq 0{,}349$.

Donc le taux moyen sur les 11 premières heures est de 34,9% environ.

Exercice 3

1.



D'après les probabilités totales, on a :

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$

$= 0{,}98x + 0{,}95(1 - x)$

$= 0{,}03x + 0{,}95$

2. $0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}03x = 0{,}01 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Donc $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; La probabilité de B est bien le double de celle de A.

Exercice 4

A1. En $+\infty$, $\frac{\ln x}{x} \to 0$ d'après les croissances comparées.

Donc C admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale.

A2. Pour tout x, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))$.

A.3. $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^1 \geq x$

Et $x^2 > 0$.

On en déduit :

x	1		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variations de $f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

B.1. $u_0 = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln(x)dx$

$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$ est de la forme $u'u$, donc admet comme primitive $F(x) = \frac{1}{2}u^2 = \frac{[\ln(x)]^2}{2}$.

$\Rightarrow u_o = \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \frac{[\ln(1)]^2}{2} = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.

Cela signifie que l'aire du domaine compris entre C, l'ase des abscisses, x = 1 et x = 2 vaut $\frac{1}{2}[\ln(2)]^2$ *ua*.

B.2. Sur [1 ; 2], on a $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2)$ soit $0 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$

On multiplie chaque membre par le nombre strictement positif $\frac{1}{x^{n+1}}$:

On obtient : $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{\ln(2)}{x^{n+1}}$.

B. 3. On passe à l'intégrale entre 1 et 2 dans l'inégalité précédente :

$$0 \leq \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^{n+1}}dx \leq \int_1^2 \frac{\ln(2)}{x^{n+1}}dx \Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}dx$$

Or $\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}dx = \left[-\frac{1}{(n+1-1)x^{n+1-1}}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = -\frac{1}{n \times 2^n} - \left(-\frac{1}{n \times 1^n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n \times 2^n}$

Donc $\ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}dx = \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

B.4. Si $n \to +\infty$, alors $2^n \to +\infty$ et donc $\frac{1}{2^n} \to 0$

De plus $\frac{\ln(2)}{n} \to 0$

Donc $\frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 0$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la limite de la suite (u_n) est 0.