TS **Devoir maison 5** **pour le 02/03/2020**

Exercice 1

On considère le repère orthonormé de l'espace $(O; I; J; K)$ donné en annexe (à rendre avec la copie) et les points $A(3;0;0), B(0;0;2)$ et $C(0;2;0)$.
On note N le milieu de $[BC]$ et M le point tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
On considère le tétraèdre $OABC$.

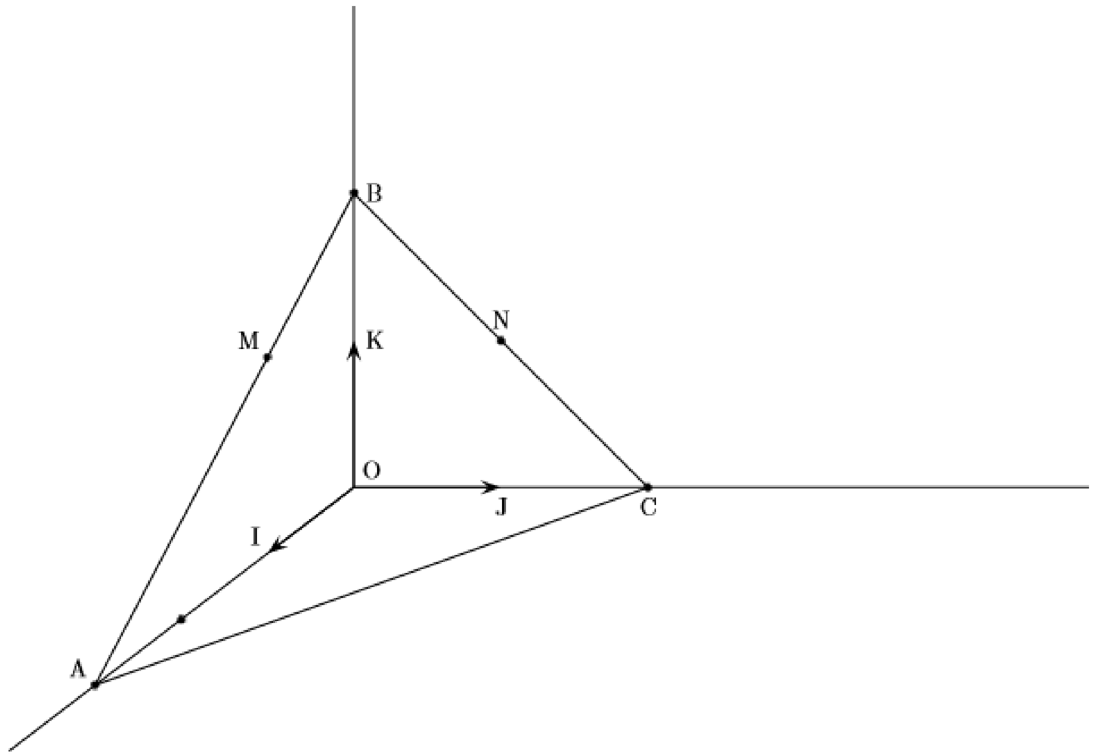
Partie A : section du tétraèdre par le plan (MNI)

1. Justifier que les droites (MN) et (AC) sont sécantes en un point L. Construire le point L.
2. Tracer en rouge l'intersection des plans (MNI) et (OAC).
3. En déduire la section du tétraèdre et du plan (MNI).

Partie B

1. Calculer les coordonnées des points M et N.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (AC).
3. On admet que la droite la (MN) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = \dfrac{4}{3} - \dfrac{s}{3} \end{cases}$ $, s \in \mathbb{R}$

   Déterminer les coordonnées du point L.
4. Démontrer que les points I, J et L sont alignés.



Exercice 2

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par :

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a. Calculer $f(20)$.
   b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b. On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1{,}75$
$p \leftarrow 0{,}1$
$V \leftarrow 0{,}7$
Tant que $V > 0{,}035$
    $t \leftarrow t + p$
    $V \leftarrow (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$
Fin Tant que

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;11]$ par :

$$F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$.
   b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$.
   Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Exercice 4

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).*