Devoir maison 4 – Eléments de correction

Exercice 1

Partie A

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - x > 0$, donc f est strictement croissante et $f(0) = 1 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
Donc $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, ainsi $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1$.
   car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ (croissances comparées)
   $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
2. $g'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x-1)e^{-x} = (3-x^2)e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ et $3 - x^2$ ont le même signe.
3.

x	$-\infty$		α		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\simeq -7,28$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\simeq 1,97$	$\searrow$	1

4. a. D'après le tableau de variation et le théorème de la bijection, il y a une seule solution dans $]-\infty; -\sqrt{3}]$ et une seule solution dans $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. Il n'y a aucune solution dans l'intervalle $[\sqrt{3}; +\infty[$.
   Il n'y a que deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b. $-2,39 < \alpha < -2,38$.

5.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie C

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4x+3)e^{-x} = 0$ (même méthode que pour g), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. $f'(x) = 1 - (2x+4)e^{-x} + (x^2+4x+3)e^{-x} = (x^2+2x-1)e^{-x} + 1 = g(x)$.
   b.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$