Mathématiques

Devoir Maison 4

Terminale S5

Cité Scolaire Gambetta

Année scolaire 2019-2020

<u>Exercice 1 :</u>

Partie A ***R.O.C***

On rappelle que pour tout $x \in IR$, $e^x > x$

1. Etudier les variations de la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$

   (*la limite en $+\infty$ n'est pas demandée*)

2. Démontrer alors que, pour *x* > 0, on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

3. En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Partie B – Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction *g* définie sur IR par $g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)e^{-x} + 1$

1. Etudier les limites de *g* en $+\infty$ et en $-\infty$. (*On rappelle que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ *).*
2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $\left(3 - x^2\right)$ ont le même signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4.
   a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet 2 solutions dans IR, dont l'une vaut 0.

   b. On note α la solution non nulle. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.

Partie C – Etude de la fonction *f*

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)e^{-x}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.
2.
   a. Démontrer que, pour tout réel *x*, $f'(x) = g(x)$.

   b. Dresser alors le tableau de variations de la fonction *f*.