TS 1 - Devoir maison n° 2 : Eléments de correction

Exercice 1 :

1.

$$f(\overline{z}) = \overline{z}^4 - 10\overline{z}^3 + 38\overline{z}^2 - 90\overline{z} + 261$$

$$f(\overline{z}) = \overline{z^4} - \overline{10z^3} + \overline{38z^2} - \overline{90z} + 261$$

$$f(\overline{z}) = \overline{z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261} = \overline{f(z)} = 0$$

Si z est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors son conjugué $\overline{z}$ l'est aussi.

2.

$$f(bi) = (bi)^4 - 10(bi)^3 + 38(bi)^2 - 90(bi) + 261$$

$$f(bi) = b^4i^4 - 10b^3i^3 + 38b^2i^2 - 90bi + 261$$

$$f(bi) = b^4 + 10b^3i - 38b^2 - 90bi + 261 = b^4 - 38b^2 + 261 + i\left(10b^3 - 90b\right)$$

Donc $Re(f(ib)) = b^4 - 38b^2 + 261$ et $Im((f(ib)) = 10b^3 - 90b$

3. Un imaginaire pur est solution de $f(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(f(ib)\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(f(ib)\right) = 0$

$\Leftrightarrow b^4 - 38b^2 + 261 = 0$ et $10b^3 - 90b = 0$

$\Leftrightarrow b^4 - 38b^2 + 261 = 0$ et $10b\left(b^2 - 9\right) = 0$

$\Leftrightarrow\Leftrightarrow b^4 - 38b^2 + 261 = 0$ et $10b\left(b^2 - 9\right) = 0$ et $b = 0$ ou $b = -3$ ou $b = 3$

Mais seuls 3 et –3 sont aussi solutions de l'équation $b^4 - 38b^2 + 261 = 0$.

Donc il y a 2 imaginaires purs solutions de $f(z) = 0$: 3i et –3i.

4. $\left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + 9z^2 + 9\alpha z + 9\beta = z^4 + \alpha z^3 + z^2\left(\beta + 9\right) + 9\alpha z + 9\beta$

Par identification, $\begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta + 9 = 38 \\ 9\alpha = -90 \\ 9\beta = 261 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = 29 \end{cases}$

Donc $f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 - 10z + 29\right)$

5.

$f(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 - 10z + 29\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$

$\Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i$

Donc $S = \left\{-3i; 3i; 5 - 2i; 5 + 2i\right\}$

Exercice 2 :

1. $z' = (1-i)^2 - (1-i) + 5 = 4 - i$, donc $M'(4-i)$

2. Il faut résoudre $z' = 4 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Il y a deux points qui ont comme image le point d'affixe 4 : $M_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Il faut résoudre $z' = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 5 = z - 0$
$\Leftrightarrow z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

Il y a deux points invariants $\Omega_1(1+2i)$ et $\Omega_2(1-2i)$.

4. $OMAM'$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'A}$
$\Leftrightarrow z - 0 = 1 - z' \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$.

Il y a deux points qui conviennent $M_3(2i)$ et $M_4(-2i)$.

5. Soit $M(z)$ avec $z = x + iy$.

$M' \in (Ox) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 2xy - y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

L'ensemble cherché est la réunion de deux droites d'équation $y = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 :

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + \frac{1}{0+1}}{2 - u_0} = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{u_1 + \frac{1}{0+1}}{2 - u_1} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+1}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

2.

n	0	1	2	3	4
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

3. On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

4. Soit $P(n) : u_n = \dfrac{n}{n+1}$

***Amorce* :** Montrons que $P(0)$ est vraie

$u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{0+1} = 0$ donc on a bien $u_0 = \dfrac{0}{0+1}$

Hérédité :

On suppose que $P(n)$ est vraie à un certain rang n, prouvons que l'égalité reste vraie au rang suivant $n+1$ soit $P(n+1) : u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

Or

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2 - u_n} = \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1) - n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Par récurrence, on a donc prouvé que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout entier n