Mathématiques

Cité Scolaire Gambetta

Année scolaire 2019-2020

Devoir Maison 2

Terminale S5 - Donné le mardi 17 septembre, à rendre le mercredi 25 septembre.

Exercice 1 :

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$.

1. Démontrer que si z est solution de l'équation $f(z)=0$, alors son conjugué $\overline{z}$ l'est aussi.
2. Soit $b\in\mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(bi)$.
3. En déduire que l'équation $f(z)=0$ admet 2 solutions imaginaires pures.
4. Démontrer qu'il existe 2 réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout nombre complexe z on ait : $f(z)=\left(z^2+9\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.
5. Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=0$.

Exercice 2 :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ et à tout point M d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2-z+5$.

1. Calculer l'affixe du point M' lorsque le point M a pour affixe $1-i$.
2. Si le point M' a pour affixe 4, où se situe le point M ?
3. Démontrer qu'il existe 2 points M invariants et préciser leurs affixes.
4. Soit le point A d'affixe 1.
   Déterminer les affixes des points M tels que OMAM' soit un parallélogramme.
5. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartient à l'axe des réels.

Exercice 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+\dfrac{1}{n+1}}{2-u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2 en détaillant les calculs.
2. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

3. Conjecturer alors l'expression de u_n en fonction de *n*.
4. Démontrer cette conjecture par récurrence.