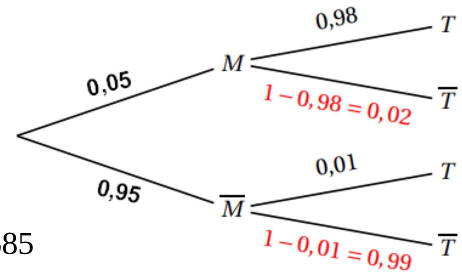
Exercice 1 :

Partie A :



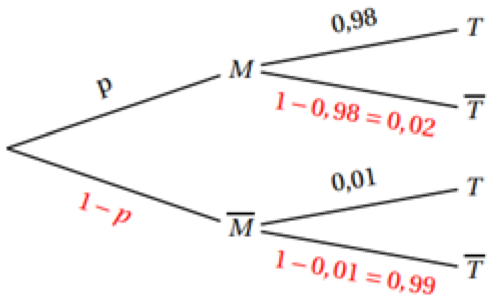
2. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,05\times0,98=0,049$.

D'après la formule de probabilités totales :

$$P(T)=P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T)=0,049+0,95\times0,01=0,0585$$

3. D'après la formule des probabilités conditionnelles : $P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,049}{0,0585}\simeq0,838$

Partie B :



D'après l'arbre :
- $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=p\times0,98=0,98p$
- $P(\overline{M}\cap T)=P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)=(1-p)\times0,01=0,01-0,01p$

D'après la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T)=0,98p+0,01-0,01p=0,97p+0,01$

2. a. La probabilité de M sachant T est $P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,98p}{0,97p+0,01}=\dfrac{98p}{97p+1}=f(p)$ où f est définie sur $[0;1]$.

b. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0;1]$ donc dérivable sur $[0;1]$ et :
$f'(p)=\dfrac{98\times(97p+1)-98p\times97}{(97p+1)^2}=\dfrac{98}{(97p+1)^2}>0$ sur $[0;1]$
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;1]$.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
La probabilité $f(p)$ qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est égale à 0,95 quand la proportion p est solution de l'équation $f(p)=0,95$:
$f(p)=0,95 \iff \dfrac{98p}{97p+1}=0,95 \iff 9800p=95\times(97p+1) \iff 585p=95 \iff p=\dfrac{19}{117}$ soit approximativement 0,162.
La fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ donc si $p>\dfrac{19}{117}$, alors $f(p)>0,95$.
C'est donc à partir d'une proportion $p=\dfrac{19}{117}\approx16,2\%$ de malades dans la population que le test sera fiable.

Partie C :

a. On prend $p=0,15$.
Pour une personne prise au hasard, il n'y a que deux issues possibles : elle est malade (avec une probabilité $p=0,15$) ou elle n'est pas malade (avec la probabilité $1-p=0,85$).
On choisit 1 000 personnes, ce qui revient à une répétition de façon indépendante de 1 000 tirages avec remise.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes malades dans un échantillon de 1 000 personnes suit donc la loi binomiale de paramètres $n=1000$ et $p=0,15$.

b. A l'aide de la calculatrice : $P(X=120)\simeq0,0009$

c. A l'aide de la calculatrice : $P(X\geq160)\simeq1-P(X<160)=1-P(X\leq159)\simeq0,1992$

Exercice 2 :

1. En prenant la valeur particulière $t = -2$ dans la représentation paramétrique de d_1, on obtient :

$\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \\ z=-4 \end{cases}$ ce qui correspond aux coordonnées de A donc $A \in d_1$

2. La droite d_1 passe par $A(-5;4;-4)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite d_2 passe par $C(1;-1;-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} = \alpha \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\alpha \\ -1=0 \\ 2=5\alpha \end{cases}$ ce qui est impossible

Alors les droites ne sont pas parallèles

3. **a)** P est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$

Donc on a $\begin{cases} x=-5+3p+p' \\ y=4-p+p' \\ z=-4+2p-p' \end{cases}$ *p, p'* réels

b) Il faut égaliser les représentations paramétriques de d_2 et P

$$\begin{cases} 1+k=-5+3p+p' \\ -1=4-p+p' \\ -1+5k=-4+2p-p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+k=3p+p-5 \\ p'=p-5 \\ 3+5k=2p-(p-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4p-11 \\ p'=p-5 \\ 3+5(4p-11)=p+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=4p-11 \\ p'=p-5 \\ 3+20p-55=p+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4p-11 \\ p'=p-5 \\ p=\dfrac{57}{19}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4\times 3-11=1 \\ p'=3-5=-2 \\ p=3 \end{cases}$$

Il y a une valeur par paramètre ce qui signifie que le plan et la droite sont sécantes en un point.
Pour déterminer les coordonnées de ce point, on remplace les paramètres dans leur équation respective et on obtient bien le point B de coordonnées (2 ; –1 ; 4)

4. a. La droite Δ passe par $B(2;-1;4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(1;1;-1)$ alors on a $\begin{cases} x=2+r \\ y=-1+r \\ z=4-r \end{cases}$ r réel

b. Les ddroites sont sécantes si et seulement si leur point d'intersection (s'il existe) vérifie le système

$$\begin{cases} 1+3t=2+r \\ 2-t=-1+r \\ 2t=4-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3t=2+3-t \\ 3-t=r \\ 2t=4-(3-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ 3-t=r \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ 2=r \\ t=1 \end{cases}$$

Comme le système admet une solution unique, les droites d_1 et Δ sont sécantes et se coupent au point $E(2+2;-1+2;4-2)$ soit $E(4;1;2)$

Exercice 3 :

$$f(t)=3te^{-\frac{1}{4}t}+2 \text{ avec } t\geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** On a $e^{-\frac{1}{4}\times 0}=1$, donc $f(0)=3\times 0\times 1+2=0+2=2$.

   b. On a $12 \text{ s}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$ (min).
   On calcule $f(0{,}2)=3\times 0{,}2e^{-\frac{1}{4}\times 0{,}2}+2=0{,}6e^{-0{,}05}+2\approx 2+0{,}57\approx 2{,}57$.
   Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.

   c. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{4}t}=0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-0{,}25t}=0$, donc finalement :
   $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=2$.
   Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à 2 μg/mL.

2. f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$f'(t)=3e^{-\frac{1}{4}t}+3t\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}t}=e^{-\frac{1}{4}t}\left(3-\dfrac{3}{4}t\right)=3e^{-\frac{1}{4}t}\left(1-\dfrac{1}{4}t\right)=\dfrac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$.

3. **a.** On sait que quel que soit le réel t, $e^{-\frac{1}{4}t}>0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4-t$:
   - $4-t \iff 4>t$;
   - $4-t \iff 4<t$;
   - $4-t=0 \iff 4=t$.

   Conclusion : la fonction f est
   - croissante sur $[0;4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)=3\times 4e^{-\frac{1}{4}\times 4}+2=2+12e^{-1}\approx 6{,}41$;
   - décroissante sur $[4\,;+\infty[$ de $f(4)\approx 6{,}41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=2$.

   b. La fonction étant croissante sur $[0;4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)\approx 6{,}41$ puis décroissante sur $[4\,;+\infty[$, $f(4)=2+12e^{-1}\approx 6{,}41$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;+\infty[$.

4. **a.** Sur l'intervalle $[0;4]$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $f(0)=2$ à $f(4)\approx 4{,}71$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $t_0\in[0\,;4]$, tel que $f(t_0)=2{,}5$.
   La calculatrice donne :
   $f(0)=2$ et $f(1)\approx 4{,}33$, donc $0<t_0<1$;
   $f(0{,}1)\approx 2{,}29$ et $f(0{,}2)\approx 2{,}57$, donc $0{,}1<t_0<0{,}2$;
   $f(0{,}17)\approx 2{,}49$ et $f(0{,}18)\approx 2{,}52$, donc $0{,}17<t_0<0{,}18$;
   $f(0{,}174)\approx 2{,}499$ et $f(0{,}175)\approx 2{,}503$, donc $0{,}174<t_0<0{,}175$.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\,;+\infty[$ vérifiant $f(t_1)=2{,}5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1\approx 18{,}930$.

   b. Sur l'intervalle $[t_0\,;4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t)\geqslant f(t_0)=2{,}5$ et sur l'intervalle $[4\,;t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle
   $f(t)\geqslant f(t_1)=2{,}5$.
   On a donc $f(t)>2{,}5$ sur l'intervalle $]t_0\,;t_1[$ ce qui signifie que le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1-t_0\approx 18{,}93-0{,}175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.

5. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(t)=-12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t}+2t$.

   a. La fonction Fsomme de deux fonctions dérivable sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
   $F'(t)=-12e^{-\frac{1}{4}t}-12(t+4)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}t}+2=-12e^{-\frac{1}{4}t}+3te^{-\frac{1}{4}t}+12e^{-\frac{1}{4}t}+2=3te^{-\frac{1}{4}t}+2=$
   $f(t)$. Donc F est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

   b. Le taux moyen est égal à :
   $v_m=\dfrac{1}{t1-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{t_1-t_0}[F(t)]_{t_0}^{t_1}=\dfrac{1}{t_1-t_0}[F(t_1)-F(t_0)]=$
   $\dfrac{1}{t_1-t_0}\left(-12(t_1+4)e^{-\frac{1}{4}t_1}+2t_1-\left[-12(t_0+4)e^{-\frac{1}{4}t_0}+2t_0\right]\right)\approx 4{,}43$, soit en moyenne 4,4 μg/mL.

Exercice 4 :

Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$.
   Le point d'abscisse 0 sur la courbe $\mathscr{C}_1$, représentative de la fonction f_1, est le point de coordonnées $\left(0\,;\ f_1(0)\right)$, c'est à dire ici $(0\,;\ 1)$. Le point A, de coordonnées $(0\,;\ 1)$ est donc bien un point de la courbe $\mathscr{C}_1$.
2. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbf{R}$, en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
   Sa dérivée est définie sur $\mathbf{R}$ par :
   $f_1'(x) = 1 + (-1)e^{-x} = 1 - e^{-x}$.
   On a : $f_1'(x) \geqslant 0 \iff 1 - e^{-x}$
   $\iff 1 \geqslant e^{-x}$
   $\iff 0 \geqslant -x$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$
   $\iff x \geqslant 0$.
   On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Justifions maintenant les deux limites :
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$, et donc par somme :
   $\lim\limits_{+\infty} f_1 = +\infty$.
   Pour tout x on a : $f_1(x) = e^{-x} \times \left(xe^{x} + 1\right)$. Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées. On en déduit, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} + 1 = 1$.
   Comme par ailleurs on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$, on en déduit, par produit : $\lim\limits_{-\infty} f_1 = +\infty$.

Partie B

1. **a.** Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\,;\ 1]$.
   x étant dans l'intervalle $[0\,;\ 1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.
   On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\,;\ 1]$.
   I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses; la courbe $\mathscr{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

b. Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.

On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.

Comme de plus il semble que les courbes « s'écrasent » sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\dfrac{1}{2}$.

On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x, \text{ par linéarité de l'intégrale.}\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer.

On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - \mathrm{e}^x$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $x \geqslant 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc on en déduit que $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$, soit $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, donc il suit que $1 - \mathrm{e}^x \leqslant 0$.

Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}(1 - \mathrm{e}^x)$ est négatif.

L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0 ; 1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.

(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ. Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est définie par :

$F_n(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :

$I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0).$

$I_n = \dfrac{1}{2} \times 1^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \left(\dfrac{1}{2} \times 0^2 - \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \times (1 - \mathrm{e}^{-n}).$

Comme on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n} = 1$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\dfrac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.