BACCALAUREAT GENERAL

Bac Blanc n°2 – Lycée Gambetta-Carnot Arras

ANNEE 2019 - 2020

MATHEMATIQUES

OBLIGATOIRE

Série : S

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures.** - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le barème est donné à titre indicatif.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>Exercice 1</u> : 5 points

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98;

— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »

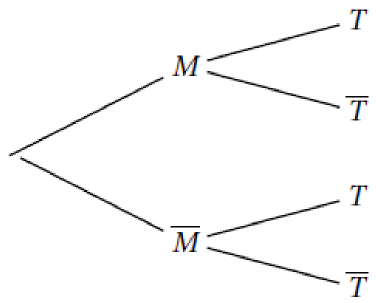
— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note *p* la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $p = 0,05$



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. Calculer $p(M \cap T)$, puis $p(T)$.
3. Calculer $p_T(M)$ (Arrondir au millième)

Partie B

Dans cette partie, on suppose que p est un réel tel que $0 \leq p \leq 1$

1. Exprimer $p(M \cap T)$, $p(\overline{M} \cap T)$ puis $p(T)$ en fonction de p. (*Vous pouvez faire un arbre de probabilité pour vous aider*)
2.
   a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction *f* définie sur [0; 1] par :
   $$f(p) = \frac{98p}{97p+1}$$
   b. Étudier les variations de la fonction *f* .
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.

   En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion *p* de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie C

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-4} *si nécessaire.*

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus. On se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus.

a. Déterminer, en justifiant votre réponse, la loi de X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 120 personnes atteintes du virus.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 160 personnes atteintes du virus.

Exercice 2 : 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1+k \\ y = -1 \\ z = -1+5k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier que le point $A(-5;4;-4)$ appartient à la droite d_1 .

2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2 .
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

3. Soit *P* le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}(1;1;-1)$.
- **a.** Donner une représentation paramétrique du plan *P*.
- **b.** Démontrer que la droite d_2 coupe le plan *P* au point $B(2;-1;4)$.

4. On considère la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}$, et passant par le point B.
- **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .
- **b.** Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ?
  Justifier et si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection E.

<u>Exercice 3</u> : 6 points

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante : $f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2$ avec $t \geq 0$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Vérifier que pour tout nombre réel t positif, on a $f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$

3. **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?

Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à [0 ; 4] telle que $f(t_0) = 2,5$.

En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 *appartenant à* $[4;+\infty[$ *vérifiant* $f(t_1) = 2,5$.

On donne une valeur approchée de t_1 *à* 10^{-3} *près :* $t_1 \approx 18,930$.

b. Déterminer pendant combien de temps chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang. (*Arrondir à la minute*)

5. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ à l'unité près.

b. En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 μg/mL.

<u>Exercice 4</u> : 5 points

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x + e^{-x}$.

1. Justifier que C_1 passe par le point A de coordonnées (0 ; 1).

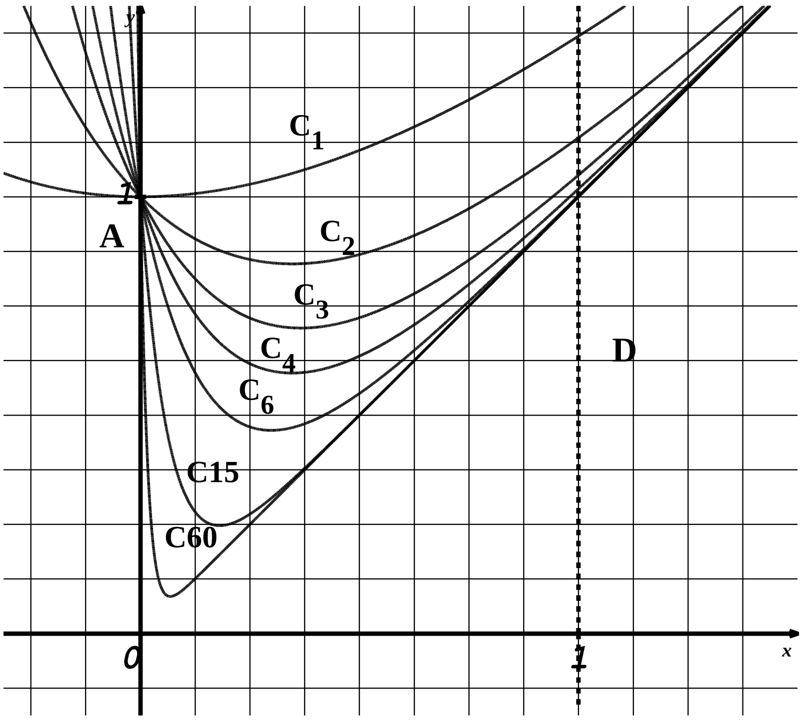
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout entier naturel n, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + e^{-nx}$. Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe C_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite D d'équation $x = 1$.

a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.



b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) dx$.

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).