TS – Bac Blanc n°1 : CORRECTION

Exercice 1

Partie A

1.

a. « L'adhérent choisit un panier de petite taille et est intéressé par une livraison d'œufs frais. » est l'événement $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

b. $P\left(B \cap \overline{F}\right) = P(B) \times P_B\left(\overline{B}\right) = P(B) \times (1 - P_B(B)) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10}$

La probabilité que l'adhérent choisisse un panier de taille moyenne et qu'il ne soit pas intéressé par une livraison d'œufs frais est égale à $\frac{1}{10}$.

c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6.

D'après la formule des probabilités totales,

$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + P(C \cap F) = 0{,}65 + P(C \cap F) \geqslant 0{,}65$

Donc $P(F) \geqslant 0{,}65$, donc la livraison d'œufs frais sera mise en place.

2.

a. $P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)}$

- $P(C \cap F) = P(F) - (P(A \cap F) + P(B \cap F)) = 0{,}675 - 0{,}65 = 0{,}025$
- $P(C) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}025}{\frac{1}{12}} = 12 \times 0{,}025 = 0{,}3$

b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais. La probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille est $P_F(C) = \dfrac{P(C \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}025}{0{,}675} \approx 0{,}04$.

Partie B

1. On répète 50 fois la même expérience aléatoire de façon identique et indépendante.
Cette expérience a 2 issues : la personne est intéressée par les œufs frais avec une probabilité de 0,675 et non intéressée avec une probabilité de 1 – 0,675 = 0,325.

X suit donc la loi binomiale $B(50; 0{,}675)$.

2.

a. A l'aide la calculatrice, on obtient $P(X = 40) \simeq 0{,}020$

b. A l'aide la calculatrice, on obtient $P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - P(X \leq 24) \simeq 0{,}997$

c. $E(X) = np = 50 \times 0{,}675 = 33{,}75$. En moyenne, en répétant un grand nombre de fois l'expérience, environ 34 personnes sur 50 seront intéressées par des œufs frais.

3. **a.** Dans cette question, $X \to B(n; 0{,}675)$. $p_n = p(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}675^0 \times 0{,}325^n = 1 - 0{,}325^n$

b. On cherche $p_n \geq 0{,}999$ soit encore $1 - 0{,}325^n \geq 0{,}999$.

A l'aide de la calculatrice on trouve $p_6 \approx 0{,}9988$ et $p_7 \approx 0{,}9996$. Donc la probabilité est supérieure à 0,999 à partir de $n = 7$.

Exercice 2

Partie A :

1. • Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$;

   • Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.

2. Démonstration par récurrence;

   Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro;

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.

   $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \Longleftrightarrow$

   $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3-2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.

   La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.

   Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2; il se factorise donc en :

   $-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n+1)(u_n+2)$ et finalement :

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{3 - \frac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \frac{10}{u_n+4} + 2} = \dfrac{2 - \frac{10}{u_n+4}}{5 - \frac{10}{u_n+4}} = \dfrac{\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}}{\frac{5u_n+20-10}{u_n+4}} =$

   $\dfrac{\frac{2u_n-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u_+4}} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{2}{5}v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = \dfrac{4}{7}$.

   b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}4^n = \dfrac{4}{7} \times 0{,}4^n$.

   Comme $\dfrac{4}{7} < 1$ et $0{,}4 < 1$ et par conséquent $0{,}4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

2. On part de la définition :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \iff v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \iff$$

$$v_n u_n - u_n = -2v_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \iff u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$

car $v_n \neq 1$.

3. $v_n = \frac{4}{7} \times 0{,}4^n$. On sait comme $0 < 0{,}4 < 1$ que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - v_n = 1$ et finalement

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
   n ← n + 1
   u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

1. À la fin on a $n = 6$.
2. La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 : on a $u_5 \approx 1{,}017$; la valeur suivante est inférieure à 1,01 : $u_6 \approx 1{,}008$.

<u>Exercice 3</u>

Partie A

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$

2) $g'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x)(1 + x)$

3) On a

x	$-\infty$		a		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

4) Sur $[-1;+\infty[$, La fonction P admet un maximum $-1 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur $]-\infty;-1]$, g est continue, strictement décroissante à valeurs dans $[-5;+\infty[$ et $0 \in [-5;+\infty[$ et le théorème de bijection, l'équation admet une <u>unique solution α</u> .

On détermine à l'aide de la calculatrice : $\boxed{\alpha \approx -2{,}10}$

5) D'après les 3) et 4) on en déduit le tableau de signe de g :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x=+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}3-2x^3=5\\ \lim\limits_{x\to-1^-}x^2-1=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$$

C_f admet une asymptote verticale x = −1

2)

$$f'(x)=\frac{-6x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(3-2x^3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-6x^4+6x^2-6x+4x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^4+6x^2-6x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(-x^3+3x-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

3) $\left(x^2-1\right)^2>0$ $f'(x)$ est donc du signe du numérateur

$2x$ s'annule en 0 et g s'annule en a

x	$-\infty$		a		-1
$2x$		$-$		$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$(x2-1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$

4) BONUS

Montrons que $f(\alpha)+3\alpha=0$

$$f(\alpha)+3\alpha=\frac{3-2\alpha^3}{\alpha^2-1}+3\alpha$$

$$=\frac{3-2\alpha^3}{\alpha^2-1}+\frac{3\alpha\times\left(\alpha^2-1\right)}{1\times\left(\alpha^2-1\right)}$$

Or

$$=\frac{3-2\alpha^3+3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}$$

$$=\frac{\alpha^3-3\alpha+3}{\alpha^2-1}=\frac{-g(\alpha)}{\alpha^2-1}=0$$

Car α solution de l'équation $g(x)=0$

On a $-2{,}2<\alpha<-2{,}1$ donc $6{,}3<f(\alpha)<6{,}4$

Exercice 4

1. Affirmation 1 : FAUSSE

$z^2 = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3} = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ qui n'est pas un réel.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

On a $\Delta = 9-4\times2\times5 = 9-40 = -31$: cette équation a deux solutions complexes :

$z_1 - \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{39}}{4}$ et $z_1 - \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{39}}{4}$: les images de ces deux complexes sont symétriques autour de l'axe des abscisses. L'affirmation est fausse.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

On a $(E) : 2z^2+(4-5)z+4=0 \iff 2z^2-z+4=0$.

On a $\Delta = 1-32<0$: les solutions sont donc complexes.

Affirmation 4 : VRAIE

Si $a\mathrm{i}$ est une solution imaginaire pure, alors :

$$-2a^2+2a\mathrm{i}(m-5)+m=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -2a^2+m & = & 0 \\ m-5 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} m & = & 2a^2 \\ m & = & 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \sqrt{\frac{5}{2}} & = & a \\ m & = & 5 \end{array}\right.$$

Pour $m=5$ il existe deux solutions imaginaires pures : $\sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{i}$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{i}$.

4. Affirmation 5 : FAUSSE

$M = M' \iff z' = z = \overline{z}(1-z)$.

Avec $z = x+\mathrm{i}y$, d'où $\overline{z} = x-\mathrm{i}y$, on obtient :

$z' = z \iff x+\mathrm{i}y = (x-\mathrm{i}y)(1-x-\mathrm{i}y) \iff x+\mathrm{i}y = x(1-x)-y^2+\mathrm{i}[-xy+y(x-1)]$.

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient respectivement :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(1-x)-y^2 \\ y & = & -xy+y(x-1) \end{array}\right.$$

La première équation donne $x^2+y^2=0$, équation qui n'est vérifiée que par le couple $(0\,;0)$.

La deuxième équation donne $y = -xy+xy-y$ soit : $2y=0$ d'où $y=0$.

Les deux conditions devant être réalisées, le seul point confondu avec son image est l'origine O. L'affirmation est fausse.