BACCALAUREAT GENERAL

Bac Blanc n°1– Lycée Gambetta-Carnot Arras

ANNEE 2019 - 2020

MATHEMATIQUES

Série : S

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures.** - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Ce sujet comporte 4 exercices.

.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif.

*Le candidat doit traiter les **quatre** exercices.*
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points** **Commun à tous les candidats**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

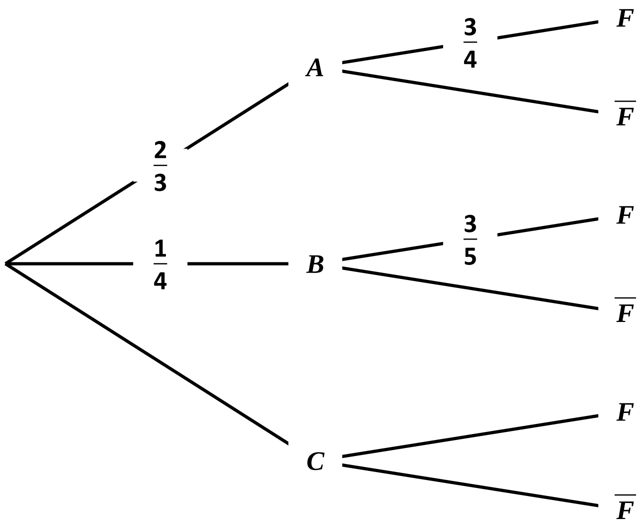
- un panier de petite taille;
- un panier de taille moyenne;
- un panier de grande taille.

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.

b. Calculer $P(B \cap F)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place?

2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0{,}675$.

a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à 0,3.

b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

On interroge au hasard 50 adhérents, en admettant que ce choix se ramène à 50 tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit intéressée par des œufs frais est de 0,675.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes intéressées par les œufs frais parmi les 50 interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et préciser les paramètres
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'exactement 40 des 50 personnes interrogées soient intéressées par des œufs frais.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit intéressée par des œufs frais.
3. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.
4. On interroge désormais n adhérents de cette association. On suppose que leurs réponses peuvent toujours se ramener à n tirages successifs indépendants et avec remise.
   a. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins une personne interrogée soit intéressée par des œufs frais.
   b. Pour quelles valeurs de n cette probabilité est-elle supérieure à 0,999 ?

<u>Exercice 2</u> **5 points** **Commun à tous les candidats**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$.

Partie A

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$. Préciser le 1er terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel $n, v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Partie C

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ≥ 1,01
    n ← n + 1
    u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

<u>Exercice 3</u> **5 points** **Commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=-x^3+3x-3$.

1. Etudier les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. On note g' la dérivée de g sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;-1\right[$ par $f\left(x\right)=\dfrac{3-2x^3}{x^2-1}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On admettra que f est dérivable sur son domaine de définition.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition et en déduire les équations des asymptotes éventuelles.
2. Démontrer que pour tout $x < -1$ on a : $f'\left(x\right)=\dfrac{2xg\left(x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   On ne cherchera pas à calculer $f\left(\alpha\right)$.
4. **Bonus** : Prouver que $f\left(\alpha\right)=-3\alpha$ et en déduire une valeur approchée de $f\left(\alpha\right)$ à 0,1 près.

<u>Exercice 4</u> **5 points** **Pour les élèves n'ayant pas suivi la spécialité**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $z=1+i\sqrt{3}$.
   Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-3z+5=0$.
   Affirmation 2 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. Soit m un nombre réel et soit l'équation (E) : $2z^2+\left(m-5\right)z+m=0$.
   Affirmation 3 : « Pour $m = 4$, l'équation (E) admet deux solutions réelles. »

   Affirmation 4 : « Il n'existe qu'une seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui soient des imaginaires purs. »

4. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :
   $$z'=\bar{z}\left(1-z\right)$$
   Affirmation 5 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M'.