Suite du cours sur les lois à densité

(*Si vous avez des questions, n'hésitez pas à me demander par mail !*)

Maintenant, nous allons étudier une 2ème loi à densité particulière : la loi exponentielle.

Nous en verrons une autre plus tard dans un autre chapitre (la loi normale)

III Loi exponentielle de paramètre λ > 0

1. Définition

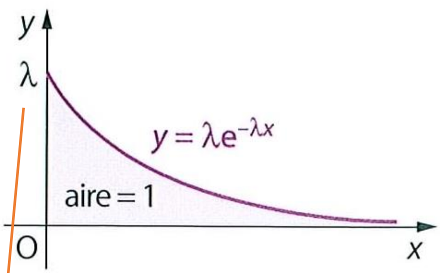
Définition

Soit λ un réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle de paramètre** λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

Formule de densité à connaître pour une loi exponentielle sur [0 ;+ inf [

Remarque :

On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$. En effet :
– la fonction f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$
– et pour tout nombre positif a,
$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = -e^{-\lambda a}+1$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\,dx = 1$, ce qui signifie que l'aire sous la courbe de f sur $[0\,;+\infty[$ est égale à 1.



La formule d'une densité pour une loi exponentielle est toujours la même, par conséquent, la primitive est toujours la même !!

L'allure de la densité est toujours la même.

On peut vous demander de lire graphiquement la valeur de λ. Il suffit de lire l'image de 0 par la fonction de densité car $f(0)=\lambda$!

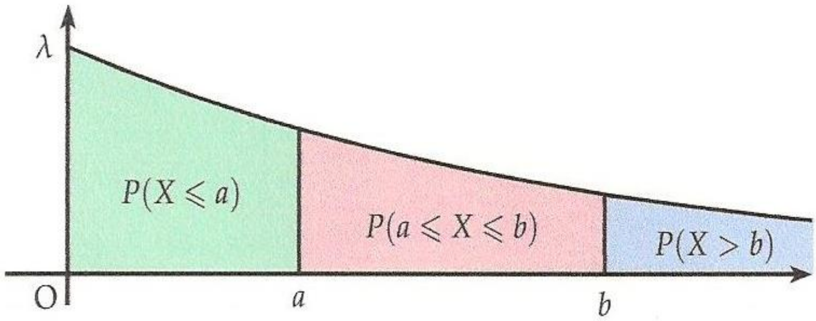
Propriétés :

- Soit P la loi exponentielle de paramètre λ . Pour tout réel positif t

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad P(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

- Si P est la loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tous <u>réels positifs a et b</u> avec $a \leq b$:

$$P([a;b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$



Les résultats de ces probabilités peuvent être appliqués directement si les réponses ne sont pas données dans l'énoncé sinon il faut les redémontrer (voir démo ci-dessous)

Démonstration

$$p(X \leq t) = p(0 \leq X \leq t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t -\left(-\lambda e^{-\lambda x}\right)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$ (*c'est la seule façon de prouver cette proba*)

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b -\left(-\lambda e^{-\lambda x}\right)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = -e^{-\lambda b} - \left(-e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Exemples

➔ ***Calculer des probabilités avec une loi exponentielle.***

On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

a. Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps égal à 5 minutes.
b. Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.
c. Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.
d. Calculer au millième près la probabilité d'attendre entre 8 et 12 minutes.

➔ ***Calculer la valeur de λ connaissant une probabilité***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ sachant que $p(X \leq 5) = 0,2$.

Déterminer la valeur de λ (arrondir au millième)

Correction des exemples

➔ ***Calculer des probabilités avec une loi exponentielle.***

a. On cherche $p(X = 5) = 0$ C'est une loi continue !
b. On cherche $p(X \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$
c. On cherche $p(X > 10) = e^{-10\lambda} = e^{-2} \approx 0,135$
d. On cherche $p(8 \leq X \leq 12) = e^{-8\lambda} - e^{-12\lambda} = e^{-1,6} - e^{-2,4} \approx 0,111$

➔ ***Calculer la valeur de λ connaissant une probabilité***

$$p(X \leq 5) = 0,2 \Leftrightarrow 1 - e^{-5\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,8) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,8)}{-5} \approx 0,045$$

(*ne pas oublier que vous devez trouver $\lambda > 0$ sinon cela signifie qu'il y a au moins une erreur dans votre calcul*)

EXERCICE 1

La variable aléatoire X égale à la durée d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle. On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est, à 10^{-3} près, égale à 0,160.

1) Calculer, à 10^{-3} près, le paramètre de cette loi exponentielle.
2) Calculer les probabilités des événements $(X=7)$ et $(6<X<10)$.
3) La demi-vie d'un nuclide est le temps T au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer, à 0,1 près, la demi-vie de l'iode 131.

Correction en pièce jointe

2. Loi de durée de vie sans vieillissement ou sans mémoire

Prenons un exemple : notons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en année, d'un composant électronique. *A priori*, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour tout t de $[0\,;+\infty[$, « $X \geqslant t$ » est l'événement « La durée de vie dépasse t années ».

On dit que la durée de vie de ce composant est **sans vieillissement** lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t ne dépend pas de t.

Cela se traduit par : la probabilité conditionnelle $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h)$ ne dépend pas de t.

Théorème : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** c'est à dire que :

$$\forall t>0 \text{ et } h>0 \quad \text{on a} \quad P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

Démonstration : On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}
P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P(X \geqslant t \text{ et } X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)
\end{aligned}$$

Remarque

On peut montrer que la loi exponentielle est la seule loi sans veillissement (hors programme)

Ceci est valable si l'appareil n'est pas sujet à un phénomène d'usure. On retrouve cette propriété en ce qui concerne la durée de vie d'un noyau radioactif.

Exemples

1)

Si la durée de vie X d'un composant électronique est sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse dix ans sachant qu'il a déjà fonctionné sept ans est $P_{X\geqslant 7}(X \geqslant 10)$, soit, avec $t = 7$ et $h = 3$, $P_{X\geqslant 7}(X \geqslant 7+3) = P(X \geqslant 3)$.

Autrement dit, le composant fonctionne « sans mémoire » des sept années passées.

2)

On considère un appareil dont la durée de vie en années suit la loi exponentielle de paramètre 0,05.

- **a.** Déterminer la probabilité que, si l'appareil a déjà fonctionné 4 ans, il fonctionne encore 5 ans.
- **b.** Déterminer la probabilité que, si l'appareil a déjà fonctionné 3 ans, il tombe en panne avant 8 ans.

-> Réponses :

a) On cherche $p_{(X>4)}(X>4+5) \underset{\substack{\text{car c'est une loi sans mémoire} \\ \text{(Il faut l'écrire pour justifier)}}}{=} p(X>5) = e^{-5\lambda} = e^{-5\times 0,05} \approx 0,779$

b) On cherche $p_{(X>3)}(X<8) = p_{(X>3)}(X<3+5) \underset{\substack{\text{car c'est une loi sans mémoire} \\ \text{(Il faut l'écrire pour justifier)}}}{=} p(X<5) = 1-e^{-5\lambda} \approx 0,221$

3. Espérance

Théorème : Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors son espérance mathématique vaut :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Résultat à connaître.

Parfois, il sert à déterminer la valeur de λ en connaissant l'espérance de la loi dans l'énoncé.

EXERCICE 2

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1) Calculer la valeur λ arrondie à trois décimales.
2) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :
   a) moins de 8 ans
   b) plus de 10 ans
   c) au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans
3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant.

Correction en pièce jointe

4. **Application à la physique** (*Les résultats de ce paragraphe ne sont pas à connaître*)

Voir TD p 392

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ. λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.

On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas déintégrer à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyau au bout d'un temps t, on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucéides soit divisé par 2. On a alors :

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Définition : Pour un variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, on appelle **demi-vie** la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X \geqslant t_{1/2}) = \frac{1}{2}$.
On obtient alors :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Enfin la durée de vie moyenne τ d'un radionucéide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$

Définition : Pour un variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, la durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique.

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$