Suite du cours sur les lois à densité

(*Si vous avez des questions, n'hésitez pas à me demander par mail !*)

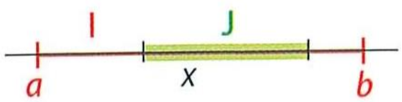
Nous avons vu dans le premier paragraphe les lois à densité de manière générale.

Maintenant, nous allons étudier des lois à densité particulières comme vous avez déjà vu, l'année dernière, des lois de probabilité discrètes et une loi de probabilité discrète particulière : la loi binomiale

II Loi uniforme

1. Définition

Si l'on choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$, $a < b$, on conçoit que la probabilité que ce nombre soit dans le sous-intervalle J est le quotient de la longueur de J par celle de I.

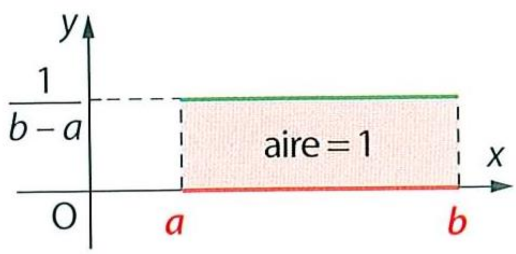


On admet que ce modèle correspond à une densité de probabilité constante sur I. Or, l'aire sous la courbe devant être égale à 1, la valeur de cette constante est $\dfrac{1}{b-a}$. D'où la définition :

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme dans l'intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$ lorsque la densité f est constante sur cette intervalle. On en déduit alors la fonction f :

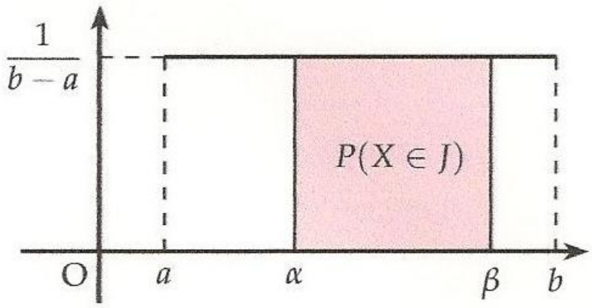
$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \mathrm{I}$$

Formule de densité à connaître pour une loi uniforme définie sur [a ; b]



Conséquence Pour tout intervalle $J = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a alors :

$$P(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$



La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.

Vous pouvez utiliser directement cette formule pour calculer une probabilité avec une loi uniforme (voir exemple ci-dessous)

Si J et K sont deux intervalles de même longueur inclus dans I, alors $P(X \in J) = P(X \in K)$.

D'où le nom de loi uniforme.

Exemple :

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;10]$.

Par définition, la variable aléatoire X qui indique le nombre choisi suit la loi uniforme sur $[0\,;10]$.

Ainsi : $P(X = 1) = 0$; $P(X > 7) = \dfrac{10-7}{10} = 0{,}3$; $P(e \leqslant X \leqslant \pi) = \dfrac{\pi - e}{10} \approx 0{,}042$.

X suit une loi continue donc p(X=a) =0 !

2. Espérance mathématique

Théorème : Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $I = [a; b]$ alors son espérance mathématique vaut :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration : D'après la définition de l'espérance, on a :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Remarque :

Dans notre exemple précédent, on trouve E(X) = 5 ce qui n'a rien de surprenant !

EXERCICES :

Faire dans le livre les exercices :

- p. 384 n° 1 -2 -3
- p. 395 n° 36 – 37 – 38 – 39