LOIS DE PROBABILITE A DENSITE

I Lois de probabilités à densité

1. Introduction

Lorsque l'on s'interesse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné. On dit alors que cette variable X est continue (qui s'oppose à discrête comme c'est le cas par exemple dans la loi binomiale).

On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur isolée de X est alors nulle. On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité.

2. Densité de probabilité

Définition :

On appelle **densité de probabilité** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction f définie sur I et vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I ;
- f est positive sur I ;
- $\int_I f(x)dx = 1$ u. a. (l'aire sous la courbe de f est égale à 1 u. a.).

Remarques :

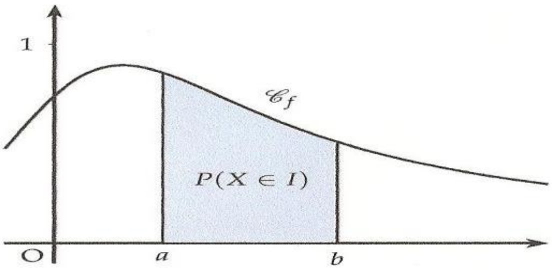
- Si I est un intervalle [a ; b], la notation $\int_I f(x)dx$ remplace la notation $\int_a^b f(x)dx$
- 2) Mais lorsque I = $[a;+\infty[$ par exemple, $\int_I f(x)dx$ désigne la limite en plus l'infini et

$$\int_I f(x)dx = 1 \quad \text{est} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = 1.$$ (idem en moins l'infini)

Définition :

On définit **la loi de probabilité de densité** f sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ en posant, pour tous réels a et b de I avec $a \le b$, $P([a;b]) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

Remarque : Comme la fonction f est continue et positive, la probabilité que X appartienne à un intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$ correspond à l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$



Propriété :

Si X une variable aléatoire définie sur $[a;b]$, de loi de probabilité de densité f, alors :

- Pour tout $\alpha \in [a;b]$, $p(X=\alpha)=0$
- Pour tous réels α et β appartenant à $[a;b]$ avec $\alpha \leq \beta$,
  $$p(\alpha \leq X \leq \beta) = p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha < X < \beta)$$

Exemple :

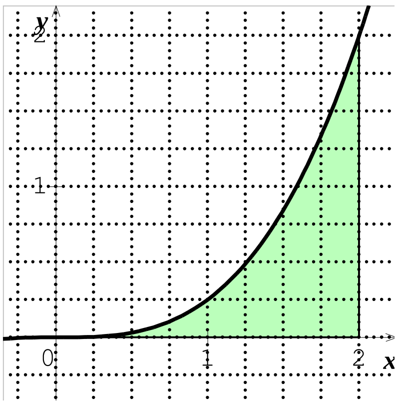
Soit k un réel et f la fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(x)=kx^3$

1) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité sur $[0;2]$.

2) Soit X la variable aléatoire définie sur $[0;2]$, de loi de probabilité de densité f.

a. Déterminer $p(1<X\leq 2)$.

b. Déterminer le réel a de $[0;2]$ tel que : $p(0 \leq X \leq a) = p(1 \leq X \leq 2)$



Correction de l'exemple

1) f est continue et positive comme fonction polynôme sur [0 ; 2].

Il faut et il suffit que $\int_0^2 kt^3 dt = 1$ pour que f soit une densité sur [0 ; 2].

$$\int_0^2 kt^3 dt = 1 \Leftrightarrow k\int_0^2 t^3 dt = 1 \Leftrightarrow k\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

2) a) $p(1<X\leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}t^3 dt = \frac{1}{16}(16-1) = \frac{15}{16}$

b) $p(0 \leq X \leq a) = p(1 \leq X \leq 2) \Leftrightarrow \int_0^a \frac{1}{4}t^3 dt = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{16}a^4 = \frac{15}{16} \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{15} \approx 1{,}97$

3. Espérance

Théorème :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur $[a;b]$ est : $E(X)=\int_a^b xf(x)dx$ **[1]**

Remarque :

Dans le cas d'une variable aléatoire X qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, …, x_k avec les probabilités p_1, p_2, …, p_k, on sait que $E(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i \times p_i$ **[*]**.

Dans **[1]**, on retrouve la somme (intégrale) des produits $x \times f(x)\,dx$ où $f(x)\,dx$ représente l'aire d'un rectangle de dimensions $f(x)$ et dx, que l'on peut interpréter comme la probabilité que X prenne des valeurs très proches de x. Ainsi, la formule **[1]** apparaît comme un prolongement de la formule **[*]**.

Exemple :

Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exercice précédent

Correction de l'exemple

$$E(X)=\int_0^2 t\times\frac{1}{4}t^3dt=\int_0^2\frac{1}{4}t^4dt=\frac{1}{20}\left(2^5-0\right)=\frac{32}{20}=1,6$$

EXERCICE

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(t)=\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)$

1. Vérifier que f est une densité pour une loi de probabilité sur $[-1;1]$.
2. Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité de densité f.
   a. Calculer $p(X<0)$, $p(-0,5<X\leq 0,5)$ et $p(X\geq 0,5)$.
   b. Calculer $E(X)$.