Cité Scolaire Gambetta

Année scolaire 2015-2016

Chapitre VI : Les nombres complexes

PRESENTATION :

On introduit un nombre « imaginaire » pour donner 2 solutions aux équations du 2nd degré dont le discriminant Δ est négatif.

On introduit un nombre $\boldsymbol{i}$ vérifiant $\boxed{i^2 = -1}$ (on n'écrit pas de préférence $i = \sqrt{-1}$)

$\boldsymbol{i}$ n'est pas un réel, c'est un nombre complexe (ou « imaginaire »)

Au XVIème siècle, les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli parviennent à résoudre des équations du 3ème et du 4ème degré.

Pour trouver des racines réelles de ces équations, ils utilisent des nombres qui ne sont pas des nombres ordinaires.

Bombelli montre que $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 4$ est solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$.

Il a recours à une expression « imaginaire ».

Au milieu du XVIIIème siècle, Euler propose de remplacer $\sqrt{-1}$ par i, nombre vérifiant donc $i^2 = -1$!

D'Alembert montre que tous les imaginaires inventés, que Gauss appellera plus tard nombres complexes, sont de la forme a + ib avec a et b réels.

Activité 1 p 232 : des nombres réels aux nombres imaginaires. + Vidéo Etienne Ghys.

I - Forme algébrique d'un nombre complexe :

1) Théorème d'existence (admis)

> Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé corps des complexes, contenant $\mathbb{R}$ tel que :
>
> - $\mathbb{C}$ possède un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
> - Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme a + ib, où a et b sont des réels.

- a + ib avec a et b réels, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
- On note z (= a + ib) un élément générique de $\mathbb{C}$.
  Alors
  - a est la partie réelle de z, notée Re(z)
  - b est la partie imaginaire de z, notée Im(z).

⚠ la partie imaginaire b est un **réel**. (***i*** ne fait pas partie de la partie imaginaire)

Exemples et remarques **:**

- si z = 2 – 3i, Re(z) = 2 et Im(z) = – 3.
- Si Im(z) = 0 (exemple z = – 8), z est un réel.
- Si Re(z) = 0 (exemple z = 5i), z est un **imaginaire pur.**
- l'écriture d'un nombre complexe sous **forme algébrique est unique**.

Conséquence :

$$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}.$$

En particulier :

$$a+ib=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ et } b=0$$

(Conséquence directe de l'unicité de l'écriture algébrique d'un complexe)

2) Opérations

$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Exemples de calculs :

Prenons z = 3 – 2i et z' = 2 + i :

z + z' = 3 – 2i + 2 + i = 5 – i.

z×z' = $(3-2i)(2+i)=6+3i-4i-2i\times i=6-i-2\times(-1)=8-i.$

–3z = –9 + 6i.

Pour définir « la division », on a besoin de se débarrasser du terme ***i*** du dénominateur.
On utilise la 3ème identité remarquable $\left(a+ib\right)\left(a-ib\right)=a^2+b^2$

$$\frac{z}{z'}=\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-3i-4i+2i^2}{2^2+1^2}=\frac{4-7i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i.$$

Remarques :

- a – ib s'appelle "quantité conjuguée « de a + ib » ou plus simplement « conjugué ».
- <u>les puissances de i</u> :

$i^3 = -i$; $i^4 = 1$ … $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$. $\boxed{\frac{1}{i}=-i}$.

+ utilisation de la calculatrice

II - Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition

Le conjugué d'un nombre complexe z = a + ib (a et b réels) est l'unique nombre complexe a – ib, noté $\overline{z}$.

Exemples : $\overline{2+3i}=2-3i$; $\overline{-4}=-4$; $\overline{2i}=-2i$.

2) Propriétés

- le conjugué de $\overline{z}$ est z, c'est-à-dire $\boxed{\overline{\overline{z}}=z.}$

- si z = a + ib, alors $z+\overline{z}=2a$ et $z-\overline{z}=2ib$, d'où :

$\boxed{z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z) \text{ et } z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)}$

utilisées aussi sous la forme $\boxed{\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

Il en résulte :

- Le complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\overline{z}$.
- Le complexe z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$.

- **Relation fondamentale** : $\boxed{z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.}$
(c'est un réel positif !, cela a été utile pour l'inverse d'un complexe).

3) Opérations sur les nombres conjugués

z et z' sont deux nombres complexes et n un entier naturel.

- le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
(idem pour la différence)
- le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec z' non nul).
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$

Démonstrations :

cas du produit :

Soient z = a + ib et z' = a' + ib' :
zz' = aa' – bb' + i(ab' + a'b), donc $\overline{zz'}=aa'-bb'-i(ab'+a'b)$.
$\overline{z}\times\overline{z'}=(a-ib)(a'-ib')=aa'-bb'-i(a'b+ab')$. cqfd

Exemples :

Le conjugué de $Z_1 = \dfrac{4-5i}{3+i}$ est $\overline{Z_1} = \dfrac{4+5i}{3-i}$.

Le conjugué de $Z_2 = \dfrac{2z^2-i}{5z+1}$ est $\overline{Z_2} = \dfrac{\overline{2}\overline{z^2}-\overline{i}}{\overline{5}\overline{z}+\overline{1}} = \dfrac{2\overline{z}^2+i}{5\overline{z}+1}$.

+ lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

4) Equation avec z et $\overline{z}$

Résoudre une équation, c'est trouver z.

Si, dans l'équation, seul apparaît z ou $\overline{z}$, on résout comme d'habitude.

Si, dans l'équation, il subsiste z et $\overline{z}$ en même temps alors on remplace z par a + ib et $\overline{z}$ par a – ib puis on résout par identification (égalité des parties réelles et des parties imaginaires)

Exemples :

Résoudre les équations suivantes :

1) $2z-3i = 4-(iz+5)$
2) $3\overline{z}-i = 5i\overline{z}+2$
3) $3\overline{z}+4z = 5-3i$
4) $\dfrac{z}{2\overline{z}} = 3-i$

III - Equation du second degré à coefficients réels :

1) Théorème

L'équation az² + bz + c = 0, où a, b et c sont trois réels (a non nul) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, éventuellement confondues.
Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de l'équation, c'est un nombre réel.

- Si $\Delta > 0$ on a deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ l'équation a une unique solution réelle : $\dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque :

Dans $\mathbb{C}$, le trinôme az² + bz + c se factorise toujours : az² + bz + c = $a(z-z_1)(z-z_2)$.

<u>Démonstration</u> :

A l'aide de la forme canonique, on obtient : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Donc résoudre az² + bz + c = 0 revient à résoudre $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

- Si $\Delta\geq 0$, c'est connu.
- Si $\Delta<0$, $\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2=\Delta$, donc l'équation devient

$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$, d'où le résultat.

<u>Exemple</u> : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

2z² - 3z + 4 =0 ; x² – 2x + 2 = 0 ; $2z^4$ + z² – 10 = 0.

a) $\Delta=-23$, $z_1=\frac{3-i\sqrt{23}}{4}$ et $z_1=\frac{3+i\sqrt{23}}{4}$. b) $\Delta=-4$, $z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$ et $z_2=1+i$.

c) Pour 2Z² + Z – 10 = 0, $\Delta=81$, donc $Z_1=-\frac{5}{2}$ et $Z_2=2$. Les solutions sont donc $\sqrt{2},-\sqrt{2},i\sqrt{\frac{5}{2}},-i\sqrt{\frac{5}{2}}$.

<u>IV - Représentation géométrique d'un nombre complexe :</u>

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

<u>1) Définitions :</u>

A tout point M (a ; b), on associe le nombre complexe z_M = a + ib, appelé affixe de M ;

Réciproquement, à tout nombre complexe z = a + ib, avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées (a ; b).
Le plan est alors appelé plan complexe.

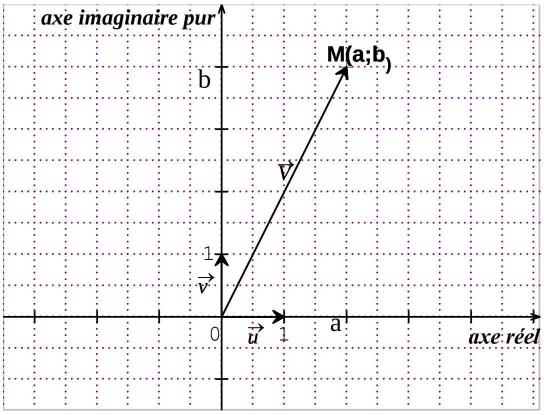
<u>Vecteurs :</u>

A tout point M(a ; b) dans le repère alors que $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

On peut aussi associer z = a + ib affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

<u>Représentation et exemples</u>

Placer dans le plan complexe les points M_i d'affixes respectives z_i :
z_1 = 2 + 3i ; z_2 = –1 + i ; z_3 = i ; z_4 = –2i ; z_5 = 1.



Interprétation géométrique : dans le plan complexe, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point M d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

Remarques :

- Si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ ont pour affixes z et z', alors $\vec{V}+\vec{V}'$ a pour affixe z + z' et $k\vec{V}$ (k réel) a pour affixe kz. (voir alors la représentation géométrique de la somme)
- l'affixe du milieu de [AB] est : $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

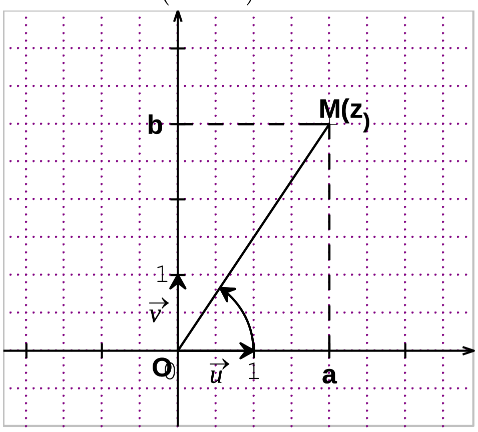
Propriété : Affixe d'un vecteur :
A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est z_B-z_A.

Démonstrations :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$...

V - Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.



Soit M un point de coordonnées cartésiennes (a ; b) distinct de O ; M possède aussi des coordonnées polaires (r ; θ) avec : r = OM = $\sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$

Donc a = $r\cos\theta$ et b = $r\sin\theta$ et $z=a+ib=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$.

1) Définitions

On en déduit une nouvelle écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée **forme trigonométrique de z.**

z est un nombre complexe non nul , z = a + ib, avec a et b réels.

M est le point image de z dans le plan complexe.

On appelle **module de z** la distance OM, c'est-à-dire la quantité notée $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

On appelle **argument de z**, noté arg z, n'importe quelle mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

Exemples :

- soit z = 1 – i , alors $|z| = \sqrt{2}$, puis $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

  D'où $\theta = -\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ et $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
- soit $z = 2\sqrt{3} - 2i$, alors $|z| = 4$, puis $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

  D'où $\theta = -\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ et $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

- Soient A et B tels que $z_A = -1 + 3i$ et $z_B = 2 - i$. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3 - 4i$.
  Donc AB = $|3 - 4i| = 5$.

Remarque :
z est un nombre complexe non nul.

- z est un réel si, et seulement si arg(z) = 0 ou arg(z) = π .
- z est imaginaire pur si, et seulement si arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ ou arg(z) = $-\frac{\pi}{2}$.

2) Opérations

Ces nouvelles coordonnées sont compatibles avec les opérations usuelles, ce qui facilite les calculs.

Propriétés :
Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' et n un entier naturel non nul:

- $|zz'| = |z| \times |z'|$ et arg(zz') = argz + argz' $[2\pi]$.
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Remarque **:** Attention, $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire, traduction d'une inégalité sur les distances)

Démonstration :

Avec les formes trigonométriques : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$:

$zz'=rr'\left[\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\right]$, donc d'après les formules d'addition :

$zz'=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$; et comme rr'> 0, on en déduit le résultat.

Pour les puissances, on démontre le résultat par récurrence…

Pour le quotient : reprenons le produit et posons $z'=\frac{1}{z}$:

On a alors zz'=1, donc $|zz'|=1=|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

Et arg(zz') = arg(1) = argz + arg $\frac{1}{z}$ $[2\pi]$, donc avec arg1 = 0, on a $\arg\frac{1}{z}=-\arg z\,[2\pi]$

Comme $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$, on obtient les résultats pour le quotient.

Exemples :

1) a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1-i$ et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

b) écrire Z sous forme algébrique et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\left(\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

2) soit z = $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, écrire le nombre Z = z^{2007} sous forme trigonométrique et en déduire sa forme algébrique.

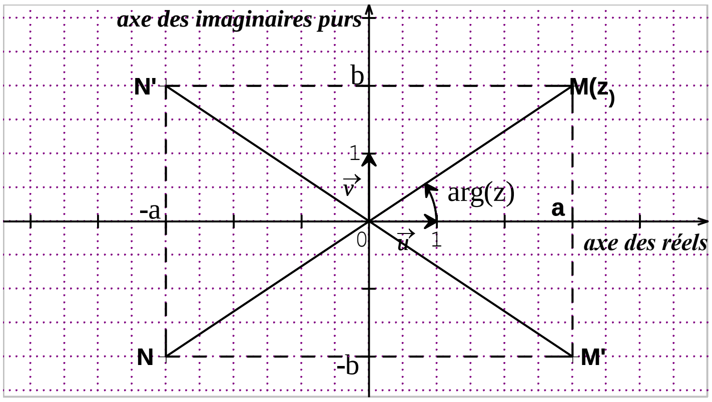
$2007\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-334\times2\pi-\pi.$

3) Propriétés du module et des arguments :

Pour tout nombre complexe non nul z :

- $|\bar{z}|=|z|$ et $\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$
- $|-z|=|z|$ et $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$
- $|-\bar{z}|=|z|$ et $\arg(-\bar{z})=\pi-\arg(z)[2\pi]$

Cette propriété s'illustre par la figure suivante :



Démonstration :

Puisque OM = OM' = ON = ON', alors $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Idem pour les arguments, c'est direct.

VI - Notation exponentielle de la forme trigonométrique :

Les propriétés algébriques du paragraphe précédent sont le mêmes que celles de la fonction exponentielle d'où l'idée d'une nouvelle notation :

$\boxed{\text{Forme exponentielle : } z = |z| \times e^{i\theta}}$

Par analogie, on a $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ (module 1 et argument θ)

⚠ c'est uniquement une notation qui facilite les calculs.

***Exemples* à connaître :** $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Propriétés : $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$

$$|z|e^{i\theta} \times |z'|e^{i\theta'} = |zz'|e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{|z|e^{i\theta}}{|z'|e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\overline{|z|e^{i\theta}} = |z|e^{-i\theta}.$$

$$|z|e^{i\theta} = |z'|e^{i\theta'} \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \theta = \theta'[2\pi]$$

Conséquence trigonométrique :

$\boxed{\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$

***Exemple* :** Montrer que $(1+i)^6 = -8i$

II – Faire de la géométrie avec les nombres complexes :

Soient A et B deux points d'affixe z_A et z_B.

On a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad (2\pi)$

1) Nature d'un triangle :

Soit ABC un triangle.

On conjecture une « particularité » en A, on étudie alors le rapport $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

En effet $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

- Si le quotient a pour module 1 alors AB = AC et ABC est isocèle en A.
- Si l'argument est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ alors le triangle est rectangle en A.
- Si l'argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$ alors le triangle est équilatéral (si il est déjà isocèle en A)

Exemples :

a) Nature du triangle ABC où $z_A = 1 + \dfrac{3}{4}i$ $\quad z_B = 2 - \dfrac{5}{4}i$ $\quad z_B = 3 + \dfrac{7}{4}i$

(Placer les points pour conjecturer)

b) Nature du triangle EFG où $z_E = 2 - 3i$ $\quad z_F = i$ $\quad z_G = 6 - i$

c) Nature du triangle PRS où $z_P = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad z_R = \overline{z_P}$ $\quad z_S = -3$

2) Etude des lieux de points

On cherche l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant une caractéristique.

2 caractéristiques usuelles :

- $|z-1| = |z+2i|$

  « z apparait 2 fois »
  On travaille sur les modules (soit des longueurs)
  Cela revient à chercher MA = MB où $z_A = 1$ et $z_B = -2i$
  Donc M appartient à la médiatrice du segment [AB].

- $|z+3-5i| = 7$

  « z apparait 1 fois »
  On travaille toujours sur les modules (soit des longueurs)
  Cela revient à chercher MC = 7 où $z_C = -3+5i$ (En effet, on a $|z-(-3+5i)| = 7$)

Remarque : Si on utilise le symbole « $\leq$ » au lieu de « = », c'est alors l'intérieur du cercle (le disque)