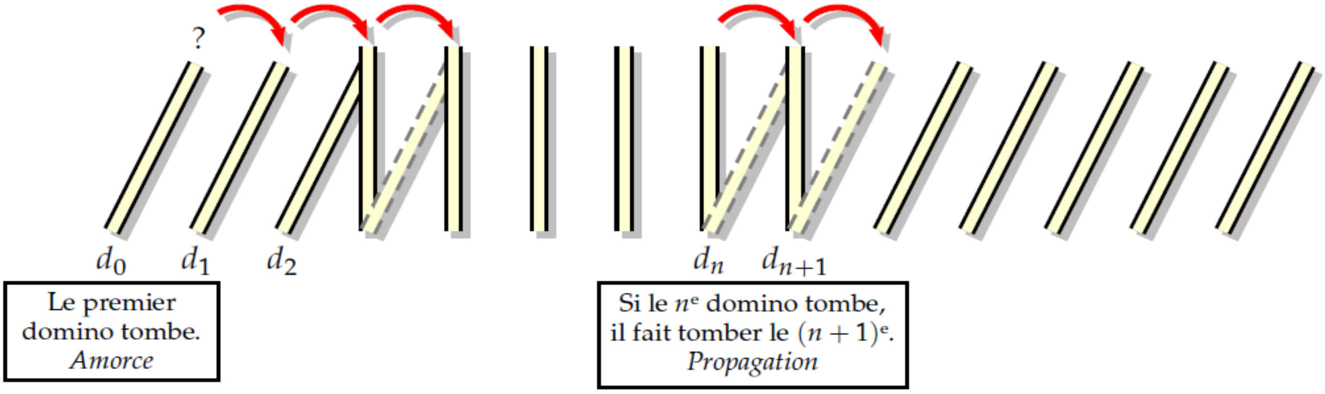
Chapitre I : Les suites

I - Le raisonnement par récurrence :

1.1 Effet domino

Le raisonnement par récurrence s'apparente à la théorie des dominos. On considère une file de dominos espacés régulièrement.



- Le premier domino d_0 tombe. C'est l'amorce.
- Les dominos sont suffisamment proches pour que si l'un des dominos d_n tombe le suivant d_{n+1} tombe également. C'est la propagation.

On peut alors conclure que tous les dominos de la file tombent les uns après les autres.

Transposons cet effet domino à une propriété mathématique.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$

Soit la propriété (P) : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1$

- Le premier domino tombe :
  $u_0 = 0,3$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est amorcée.
- Si l'un des dominos tombe le suivant tombe également :
  si $0 < u_n < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{2}u_n < \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2} < 1.$
  On a ainsi $0 < \dfrac{1}{2} < u_{n+1} < 1$. La propriété se propage.

Comme le premier domino est tombé et que les autres tombent par propagation, tous les dominos tombent et donc la propriété est bien vérifiée pour tout entier naturel.

1.2 Intérêt du raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.
Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour dégager une relation.

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 && (2^1 - 1)\\
u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 && (2^2 - 1)\\
u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 && (2^3 - 1)\\
u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 && (2^4 - 1)\\
u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 && (2^5 - 1)
\end{aligned}$$

La suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.
Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?
Notons (P) la propriété, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$
Supposons un instant, que pour un certain entier n, on ait effectivement la propriété $u_n = 2^n - 1$

Alors, on aurait : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$
Ce qui correspond à la propriété (P) à l'odre $n + 1$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant $n + 1$. On dit que la propriété (P) est *héréditaire*.

On a vérifié que la propriété (P) était vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5. On dit que la propriété (P) est *initialisée*. Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc. Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang n.

1.3 Axiome de récurrence

Définition 1 : Soit une propriété (P_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Si la propriété est *initialisée* à partir du rang 0 ou n_0
- et si la propriété est *héréditaire* à partir du rang 0 ou n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant 0$ ou $n \geqslant n_0$ alors $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors : la propriété est vraie à partir du rang 0 ou n_0

Si on montre ces deux phases la propriété est démontrée pour tout entier naturel.

⚠ Il faut veiller à ce que les deux conditions « initialisation » et « hérédité » soient vérifiées. En effet si l'une des deux conditions n'est pas respectée, on arrive à une conclusion erronée comme le prouvent les deux exemples du paragraphe 1.6

Exemple :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

a) Démontrer que pour tout naturel n, $0 < u_n < 2$

b) Prouver que la suite est strictement croissante.

* * *

a) Montrons l'encadrement de u_n par récurrence.

Initialisation : : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. La propriété est initialisée.

Hérédité : : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

$$0 < u_n < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < u_n + 2 < 4$$

comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 2$.

b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Initialisation : : on a $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 > u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : : supposons que $u_{n+1} > u_n$, montrons que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$u_{n+1} > u_n \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + 2 > u_n + 2$$

comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{u_{n+1} + 2} > \sqrt{u_n + 2} \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} > u_{n+1}$$

La proposition est donc héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante.

Autres exemples :

1) Montrer que $4^n + 5$ est divisible par 3 pour tout entier *n*.

2) Soit la suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n} \end{cases}$. Montrer que $0 \leq a_n \leq 3$ pour tout entier *n*.

3) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 2 \end{cases}$.

   Emettre une conjecture de u_n en fonction de *n* puis la démontrer. $(u_n = 2^n)$

4) Soit la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n} \end{cases}$. Calculer v_{2017}.

5) Soit *a* un réel positif. Montrer que $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout entier *n*.

Cas où une SEULE étape est vérifiée et amenant à une situation erronée

- **Situation 1 :** Hérédité seulement vérifiée

  Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, 3 divise 2^n
  Hérédité : on suppose que 3 divise 2^n, montrons que 3 divise 2^{n+1}.

  Si 3 divise 2^n, alors il existe un entier naturel *k* tel que : $2^n = 3k$
  On a, en multipliant par 2 : $2^{n+1} = 2 \times 3k = 3(2k)$. 3 divise donc 2^{n+1}

  Conclusion : la proposition est héréditaire mais comme elle n'est jamais initialisée, la proposition ne peut être vraie. Heureusement car cette proposition est fausse !

- **Situation 2 :** Initialisation vérifiée jusqu'à un certain rang.

  Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier

  L'initialisation est vérifiée car pour $n = 0$ on obtient 41 qui un nombre premier.

  Mais l'hérédité n'est pas assurée bien que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie jusqu'à $n = 40$. On peut le vérifier avec une table de nombres premiers et la liste des premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n + 41$.

n	u_n	n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	41	11	151	22	503	33	1097
1	41	12	173	23	547	34	1163
2	43	13	197	24	593	35	1231
3	47	14	223	25	641	36	1301
4	53	15	251	26	691	37	1373
5	61	16	281	27	743	38	1447
6	71	17	313	28	797	39	1523
7	83	18	347	29	853	40	1601
8	97	19	383	30	911		
9	113	20	421	31	971		
10	131	21	461	32	1033		

  Pour $n = 41$, on a : $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui n'est pas un nombre premier. La propriété est donc fausse.

  Conclusion : La véracité d'une proposition pour certaines valeurs au départ ne prouve pas la généralité !

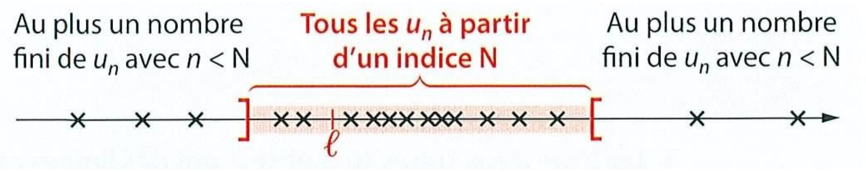
II - Limite d'une suite :

1) Suites convergentes (limite finie)

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) **converge** (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel L tel que : tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que la suite (u_n) a pour limite L, ou que la suite (u_n) converge vers L.



On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Remarques :

- Dire qu'une suite converge vers L revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de L que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Dire qu'une suite converge vers L revient aussi à dire que tout intervalle I = $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$ $(\varepsilon>0)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Dire qu'une suite converge vers L revient aussi à dire que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$

***Exemples* :** Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ convergent vers 0.

Propriété : unicité de la limite :

Si une suite (un) converge, alors sa limite L est unique.

Démonstration : Par l'absurde :

Supposons que (u_n) admette deux limites distinctes a et b (avec a < b).
On note d = b – a, distance entre a et b.

Comme (u_n) converge vers a, il existe un rang N_1 tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n \in \left]a-\frac{d}{3};a+\frac{d}{3}\right[$.

Comme (u_n) converge vers b, il existe un rang N_2 tel que $n \geq N_2 \Rightarrow u_n \in \left]b-\frac{d}{3};b+\frac{d}{3}\right[$.

Donc à partir d'un rang n supérieur à N_1 et à N_2 ($n \geq \max(N_1,N_2)$), u_n se trouve simultanément dans deux intervalles disjoints (schéma), ce qui est absurde.

2) Suites de limite infinie :

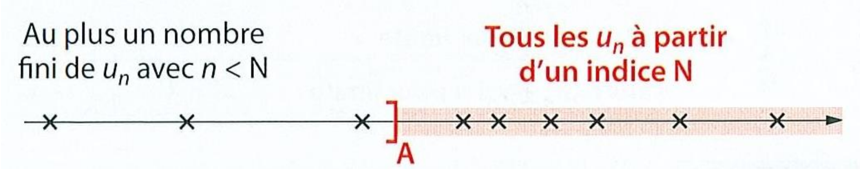
Définition :

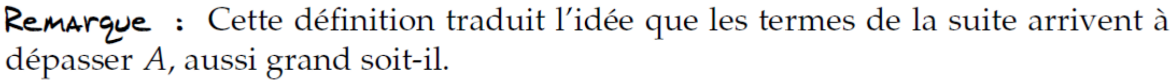
Soit (u_n) une suite

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)




Remarque : Cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Exemples : Les suites $(\sqrt{n})$, (n), (n^p) où $p \in \mathbb{N}^*$, (e^n), $(\ln(n))$ ont pour limite $+\infty$.

Remarque : Certaines suites n'admettent pas de limites : $(-1)^n$, $\sin(n)$.
On dit qu'elles divergent.

3) Limites par comparaison et par encadrement

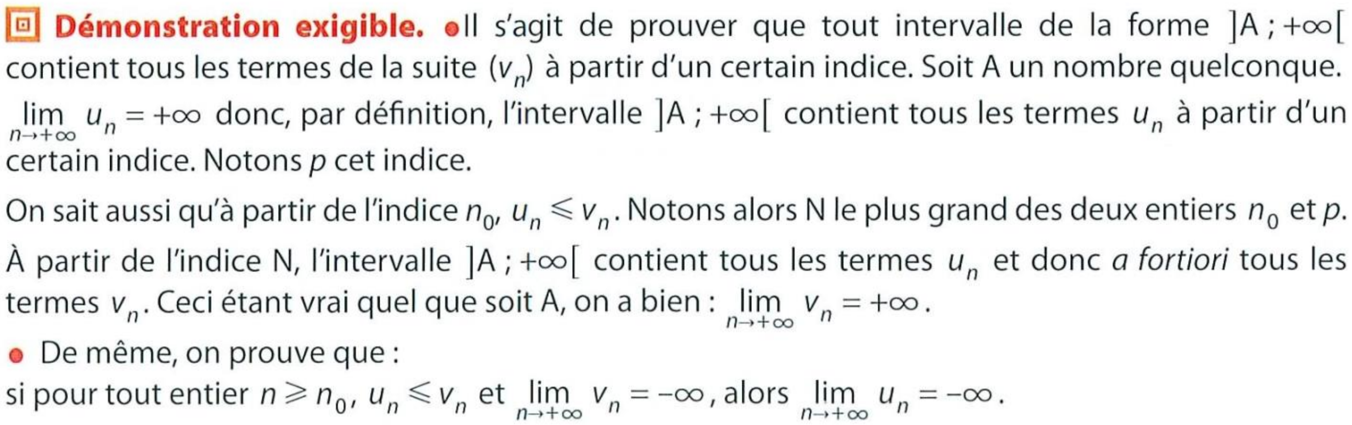
Théorèmes de comparaison : limite INFINIE

(u_n) et (v_n) sont deux suites .

Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$

- Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration exigible :


Démonstration exigible. ● Il s'agit de prouver que tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice. Soit A un nombre quelconque. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc, par définition, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice. Notons p cet indice.

On sait aussi qu'à partir de l'indice n_0, $u_n \leqslant v_n$. Notons alors N le plus grand des deux entiers n_0 et p.

À partir de l'indice N, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n et donc *a fortiori* tous les termes v_n. Ceci étant vrai quel que soit A, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

● De même, on prouve que :
si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple :

Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = n + \sin n$ diverge vers $+\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n + \sin n \geqslant n - 1$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorème des gendarmes (admis) : limite FINIE

Soit 3 suites $(u_n),(v_n)$ et (w_n).

Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n = L$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple :

- Démontrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

III - Limites et opérations :

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞^*	F. ind.	∞^*

*Appliquer la règle des signes

Limite d’un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 $^{(1)}$	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞^*	F. ind.	0	∞^*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes

(1) 0 signe constant

Exemples :

Déterminer les limites des suites suivantes :

SOMME :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = 3n + 1 + \dfrac{2}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{array}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = n^2 - n + 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{F. Ind.} \\ \text{Trouver une} \\ \text{autre méthode} \end{array}$$

Méthode : lever une FI : "$\infty - \infty$"

> Il faut en général factoriser par le terme le « plus influent »

Ex :

$$w_n = n^2\left(1 - \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{puis} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

PRODUIT :

- $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = (1-2n)\sqrt{n}$ $\quad\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} (1-2n) = -\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = \dfrac{1}{n^2}\left(2n^2+n-5\right)$ $\quad\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n^2+n-5\right) = +\infty \end{array}\right\}$ FI , trouver une autre méthode

Méthode : lever une FI : $"0\times\infty"$

> Il faut en général développer l'expression

Ex :

$u_n = \dfrac{1}{n^2}\left(2n^2+n-5\right) = 2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

QUOTIENT :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \dfrac{5}{2n^2+1}$ $\quad\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 5 = 5 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2+3 = +\infty \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \end{array}$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n = \dfrac{1}{n+1} \times (n^2+3)$ $\quad\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^2+3 = +\infty \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{F. Ind} \\ \text{Trouver une} \\ \text{autre forme} \end{array}$

,

Méthode : lever une FI : $"\dfrac{\infty}{\infty}"$

> Il faut en général factoriser le numérateur et/ou le dénominateur par chacun des « termes influents »

Ex :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ w_n = \dfrac{n^2+3}{n+1} = \dfrac{n+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$ $\quad\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n + \dfrac{3}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty \end{array}$

Simplification par n

IV - Limite d'une suite géométrique:

Théorème 3 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

Démonstration : Seule la preuve de la première limite est exigible.

On démontre par récurrence l'inégalité de Bernoulli. On a donc, pour $a > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

On pose $q = 1 + a$ donc si $a > 0$ on a $q > 1$. L'inégalité devient :

$$q^n \geqslant 1 + na$$

Comme $a > 0$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$

D'après le théorème de comparaison on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Remarque : Pour démontrer la troisième limite, on peut poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$, avec $0 < |q| < 1$ donc $Q > 1$. On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

Exemple : Soit une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
3) En déduire la limite de (u_n)

* * *

1) Il faut donc montrer que $\forall x \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = (2u_n + 5) + 5 = 2(u_n + 5) = 2v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er^ terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$

2) On en déduit alors : $v_n = v_0\, q^n = 7 \times 2^n$ donc $u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$

3) D'après le théorème ci-dessus, $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Par somme et produit, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

V - Convergence des suites monotones :

1) Suite majorée - suite minorée – suite bornée :

Définitions : Soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$

- on dit que la suite (u_n) est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout entier n ≥ n₀, $u_n \leq M$
M est alors appelé **un majorant** de la suite.

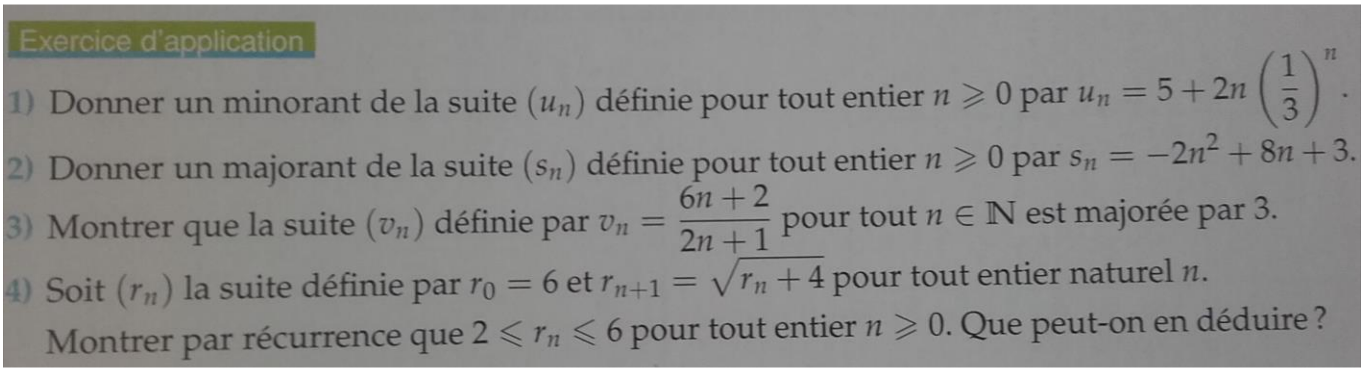
- on dit que la suite (u_n) est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout entier n ≥ n₀, $u_n \geq m$
m est alors appelé **un minorant** de la suite.

- on dit que la suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Méthode : montrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée

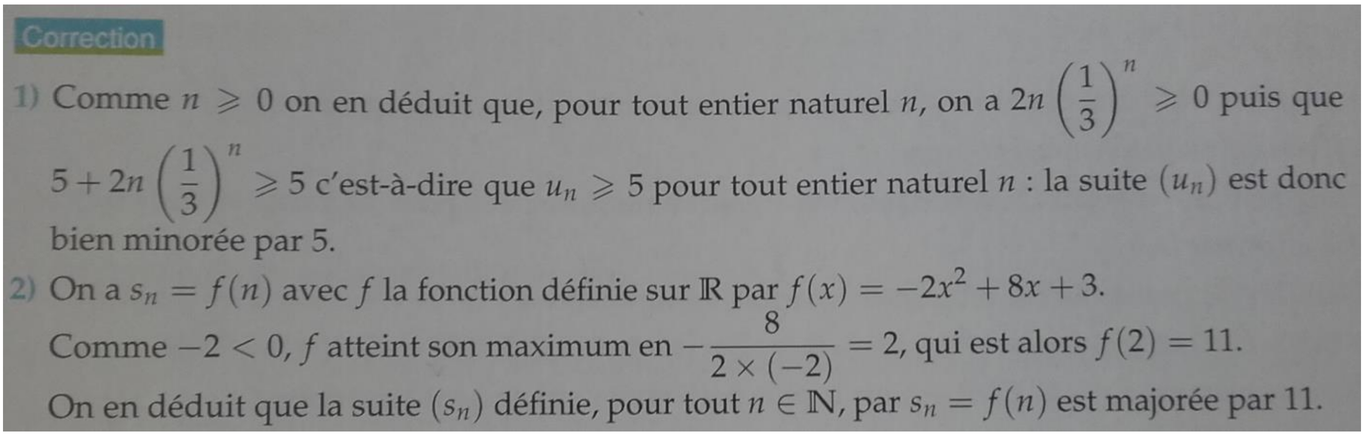
- Utilisation de majorations, de minorations ou d'encadrements évidents.
- Utilisation des variations de f dans le cas où $u_n = f(n)$
- Etude du signe de la différence entre les termes de la suite et le minorant ou majorant éventuel
- Utilisation d'un raisonnement par récurrence

Ex :



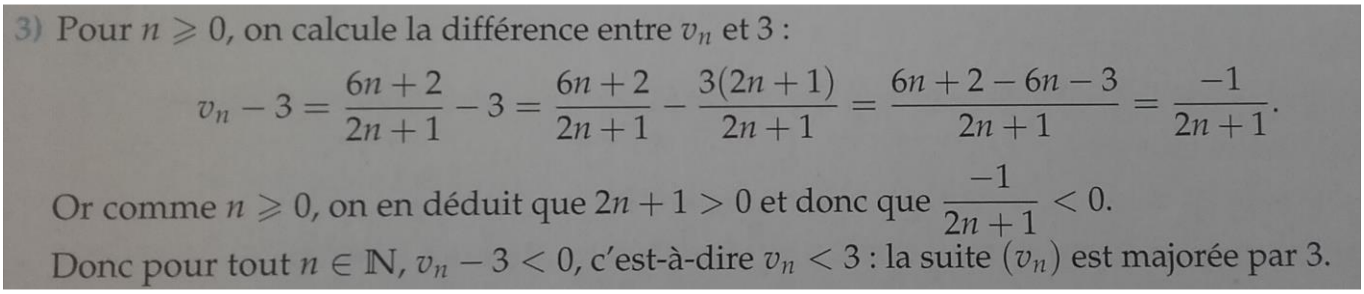
Exercice d'application

1) Donner un minorant de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 5 + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2) Donner un majorant de la suite (s_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $s_n = -2n^2 + 8n + 3$.
3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{6n+2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est majorée par 3.
4) Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?



Correction

1) Comme $n \geqslant 0$ on en déduit que, pour tout entier naturel n, on a $2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 0$ puis que $5 + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 5$ c'est-à-dire que $u_n \geqslant 5$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est donc bien minorée par 5.
2) On a $s_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$.
Comme $-2 < 0$, f atteint son maximum en $-\dfrac{8}{2\times(-2)} = 2$, qui est alors $f(2) = 11$.
On en déduit que la suite (s_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = f(n)$ est majorée par 11.

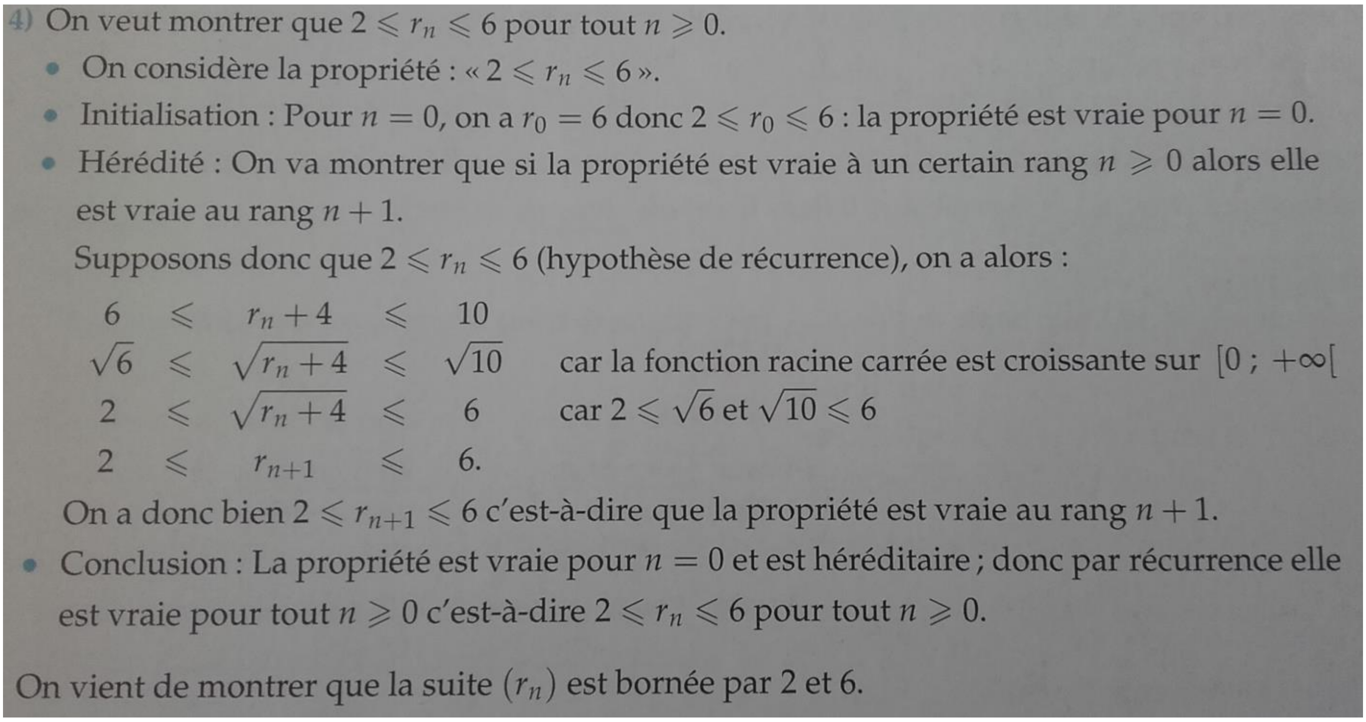


3) Pour $n \geqslant 0$, on calcule la différence entre v_n et 3 :

$$v_n - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - \frac{3(2n+1)}{2n+1} = \frac{6n+2-6n-3}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}.$$

Or comme $n \geqslant 0$, on en déduit que $2n+1 > 0$ et donc que $\frac{-1}{2n+1} < 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 3 < 0$, c'est-à-dire $v_n < 3$: la suite (v_n) est majorée par 3.



4) On veut montrer que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout $n \geqslant 0$.

- On considère la propriété : « $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $r_0 = 6$ donc $2 \leqslant r_0 \leqslant 6$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.

  Supposons donc que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ (hypothèse de récurrence), on a alors :

  $$\begin{array}{ccccll} 6 & \leqslant & r_n + 4 & \leqslant & 10 & \\ \sqrt{6} & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \leqslant & \sqrt{10} & \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0\,;\,+\infty[\\ 2 & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \leqslant & 6 & \text{car } 2 \leqslant \sqrt{6} \text{ et } \sqrt{10} \leqslant 6 \\ 2 & \leqslant & r_{n+1} & \leqslant & 6. & \end{array}$$

  On a donc bien $2 \leqslant r_{n+1} \leqslant 6$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout $n \geqslant 0$.

On vient de montrer que la suite (r_n) est bornée par 2 et 6.

2) Rappels sur les suites monotones :

Définitions : Soit la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$

- on dit que la suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- on dit que la suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- on dit que la suite (u_n) est **constante** ou stationnaire si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit de même des suites strictement croissante ou strictement décroissantes, à l'aide d'inégalités strictes.
Une suite croissante ou décroissante est appelée suite **monotone**.
Etudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si elle est croissante ou décroissante (elle peut n'être ni l'un ni l'autre).

Etude du sens de variation d'une suite

Méthode 1 : On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs.

Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, cela signifie que $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite est croissante.
Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, cela signifie que $u_{n+1} \leq u_n$. Donc la suite est décroissante.

Exemple : $u_n = 2^n - n$.
Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n - 1$.
Or pour tout entier n, $2^n \geq 1$, donc pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Cette suite est donc croissante.

Méthode 2 :

Théorème : Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de f sur [0 ; +∞[.

- Si f est croissante sur [0 ; +∞[, alors la suite est croissante ;

- Si f est décroissante sur [0 ; +∞[, alors la suite est décroissante.

Remarque : La condition est suffisante, non nécessaire ; cf $u_n = \cos(2\pi n) + n$.

Exemple : Soit la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 8n + 7$.
$u_n = f(n)$, où $f(x) = x^2 - 8x + 7$.
On étudie le sens de variation de cette fonction trinôme :
$f'(x) = 2x - 8$.

x	-∞ +∞		4	
signe de 2x – 8		–	0	+
variations de f		↘		↗

f est croissante sur [4 ; +∞[, donc la suite est croissante à partir de n = 4.

Méthode 3 : uniquement pour une suite à termes strictement positifs

- Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite est croissante ;

- Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite est décroissante.

Exemple : $v_n = \dfrac{n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $v_n > 0$ pour tout n > 0 et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{1}{3} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \times \dfrac{1}{3}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$ et alors $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$. On en déduit $1 < 1 + \dfrac{1}{n} \leq 2$ et donc $\dfrac{1}{3} < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \times \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{3}$.
Conclusion, pour tout n > 0, $v_{n+1} < v_n$, donc la suite décroît.

(voir aussi la monotonie d'une suite géométrique)

3) Théorèmes de convergence de suite monotone

Théorème 1 :

Toute suite **croissante et non majorée** a pour limite +∞.

Toute suite **décroissante et non minorée** a pour limite - ∞.

Démonstration : pour une suite croissante non majorée :

> Il faut prouver que pour tout réel A aussi grand soit-il, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.
> (u_n) n'est pas majorée, donc A ne peut être un majorant de la suite.
> Il existe donc un entier naturel p tel que $u_p > A$.
> Or (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geq p$, $u_n \geq u_p > A$.
> Ceci étant vrai quel que soit A, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2 : (admis) :

Toute suite **croissante et majorée** est convergente.

Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

⚠ Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite.
On peut seulement dire que, si (u_n) est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant M$ et si (u_n) est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1. Montrer, par récurrence, que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l.
3. On suppose que l vérifie l'équation $l = \sqrt{3l+4}$. Déterminer l.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 3{,}99$.

* * *

1) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4. C'est à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

Initialisation : : on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{4} = 2$, on a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$

La proposition est initialisée.

Hérédité : : on suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, montrons alors que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$
$$0 \leqslant 3u_n \leqslant 3u_{n+1} \leqslant 12$$
$$4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 3u_{n+1} + 4 \leqslant 16$$

Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$2 \leqslant \sqrt{3u_n + 4} \leqslant \sqrt{3u_{n+1} + 4} \leqslant 4$$
$$0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$$

La proposition est héréditaire

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.

2) (u_n) est croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) est convergente.

3) $l = \sqrt{3l+4} \Leftrightarrow l^2 = 3l + 4 \Leftrightarrow l^2 - 3l - 4 = 0 \Leftrightarrow l = -1$ ou $l = 4$ or la suite est à termes positifs donc l = 4

4) A la calculatrice : pour n = 7.

Annexe : Rappels sur les suites arithmétiques et sur les suites géométriques

1) Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'on s'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n).

Remarques :

- Une suite arithmétique est définie par récurrence par son 1er terme u_0 et sa raison r :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

- Pour une suite arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs est constante, égale à la raison.

Exemples :

- (u_n) est la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

Ainsi $u_1 = u_0 + r = 5 - 2 = 3$

$u_2 = u_1 + r = 3 - 2 = 1$ …

- (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = 1{,}5 + 0{,}5n$.

On a : $u_0 = 1{,}5$; $u_1 = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$; $u_2 = 1{,}5 + 2\times0{,}5 = 2{,}5$; $u_3 = 1{,}5 + 3\times0{,}5 = 3$

Cette suite semble arithmétique de raison 0,5.

Vérifions que $u_{n+1} - u_n$ est constant : $u_{n+1} = 1{,}5 + 0{,}5\times(n + 1) = 1{,}5 + 0{,}5n + 0{,}5 = 2 + 0{,}5n$.

$u_{n+1} - u_n = 2 + 0{,}5n - (1{,}5 + 0{,}5n) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$, constant quels que soient les termes consécutifs de la suite.

Le résultat est bien vérifié (voir remarque ci-dessus).

Terme général d'une suite arithmétique

Propriété :

(u n) est la suite arithmétique de 1er terme u 0 et de raison r.

Pour tout entier n, u n = u o + nr. Et pour tout entier p, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Exemple : (u_n) est la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_6 = 2$.

Alors $u_{10} = u_6 + (10 - 6)\times3 = 14$.

Somme de termes consécutifs

Propriété :

Pour une suite arithmétique (u_n), on a : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\times\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

En général, on retient que la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par : $S = (\text{nombre de termes})\times\dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$.

Exemple : (u_n) est la suite arithmétique de raison 2 de premier terme $u_5 = -7$.

Calculons $S = u_5 + u_6 + \ldots + u_{100}$.

100 – 5 + 1 = 96 ; dans la somme il y a 96 termes. (rang du dernier – rang du 1er + 1)

$u_{100} = u_5 + (100 - 5)\times2 = 183$. Donc $S = 96\times\dfrac{-7+183}{2} = 8448$.

2) Suites géométriques

Définition :
Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Ce nombre q est alors appelé la raison de la suite.

Remarques :
- Une suite géométrique est définie par récurrence par son 1er terme u_0 et sa raison q :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$$

- Pour une suite géométrique dont la raison et chaque terme sont non nuls, le quotient entre deux termes consécutifs (u_{n+1}/u_n) est constant, égal à la raison.

Exemples :

- (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$, de raison $q = 1,5$.

Ainsi, $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 1,5 = 3$;
$u_2 = u_1 \times q = 3 \times 1,5 = 4,5$ …

- (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3\times 2^n$.

On a $u_0 = 3\times 2^0 = 3\times 1 = 3$; $u_1 = 3\times 2^1 = 6$; $u_2 = 3\times 2^2 = 12$;
Cette suite semble géométrique de raison 2, il faut vérifier que u_n / u_{n+1} est constant.
$u_{n+1} = 3\times 2^{n+1}$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$, constant pour tout n. Le résultat est bien vérifié.

Terme général d'une suite géométrique

Propriété :

(u_n) est la suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.
Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$. Et plus généralement, pour tout entier p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : (u_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $u_6 = 2$.
Alors $u_{10} = u_6 \times q^{10-6} = 2\times 3^4 = 162$.

Somme de termes consécutifs

Propriété :

Pour une suite géométrique (u_n), on a : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

En général, on retient que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1\text{-}q}$$

Exemple : (u_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = -4$.
Calculons $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{20}$.

$u_4 = u_1 \times q^{4-1} = -4 \times 2^3 = -32$; 20 – 4 + 1 = 17 ; dans cette somme, il y a 17 termes.
Donc $S = -32\times\frac{1-2^{17}}{1-2} = -4194272$.