PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I Produit scalaire

Définition : Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même façon que dans le plan. Les trois définitions suivantes sont équivalentes et la deuxième demande un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';k')$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

- **Formule 1 : identité remarquable**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

- **Formule 2 : géométrie analytique**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

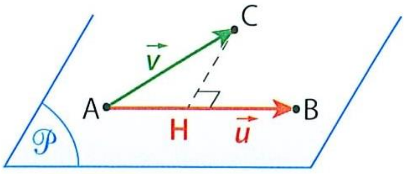
- **Formule 3 : angle entre les deux vecteurs**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Remarque

Si dans un plan $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.



Propriété : Dans l'espace, le produit scalaire est :

- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- distributif (bilinéarité) par rapport à l'addition de deux vecteurs :
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
- distributif (bilinéarité) par rapport à la multiplication par un scalaire :
$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et :

- de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$

Exemple :

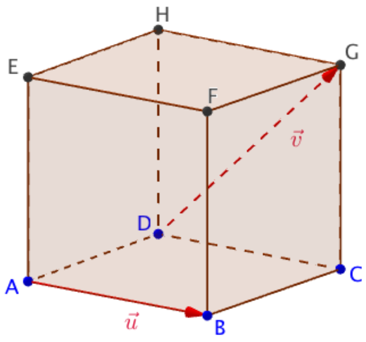
ABCDEFGH est un cube d'arête a.

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$

$= AB \times AB$

$= a^2$



II Orthogonalité dans l'espace

Définition :
Deux droites sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque sont perpendiculaires.

Théorème :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Donc dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont orthogonaux ssi xx' + yy' + zz' = 0.

Remarque :
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exercices :

1) Déterminer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

$$\vec{u}\left(2\,;\,-\frac{1}{2}\,;5\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}\,;\,3\,;\,\alpha\right)$$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(2;-5;1)$ et $B(0;2;6)$.
Démontrer que la droite d qui passe par le point $C(-2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=-4\vec{\imath}+\vec{\jmath}-3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB)

= =

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\times-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times 3+5\alpha=0\\
-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+5\alpha=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right)\\
\alpha=\frac{1}{5}\left(\frac{23}{10}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha=\frac{23}{50}
\end{aligned}$$

2) Les droites d et (AB) sont orthogonale si, et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On a :

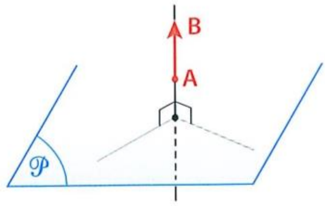
$$\vec{u}=(-4;1;-3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}=(-2;7;5)$$
$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=-4\times(-2)+1\times 7-3\times(5)=8+7-15=0$$

On a donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du points C ne servent à rien sauf à montrer que les droites sont perpendiculaires chose ici non vérifiée.

III Equation cartésienne d'un plan

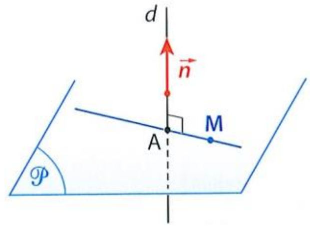
1) Vecteur normal

Définition : Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$



2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Le plan $\mathscr{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



Théorème : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ perpendiculaires à Δ.

Remarque :

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires de P, alors :

$$\Delta \perp P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{j} = 0.$$

ROC **Démonstration :**

- $\Rightarrow$ Si Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc Δ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$ donc à deux sécantes de $\mathscr{P}$
- $\Leftarrow$ Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ les vecteurs directeurs respectifs des deux sécantes de $\mathscr{P}$: d_1 et d_2.

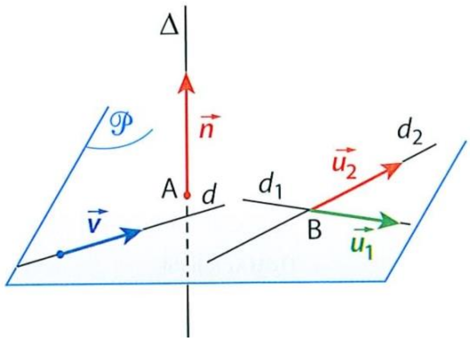
  1) Δ est perpendiculaire à d_1 et d_2 donc : $\vec{n} \cdot \vec{u_1} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 0$

  2) d_1 et d_2 sont sécantes donc les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéraires, ils forment donc un couple de vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$.

  3) Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur d'une droite quelconque de $\mathscr{P}$, comme $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ forment un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$, on a : $\vec{v} = a\,\vec{u_1} + b\,\vec{u_2}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

  4) $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (a\,\vec{u_1} + b\,\vec{u_2}) = a\,\vec{n} \cdot \vec{u_1} + b\,\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 0$ d'après le 1)

  Δ est donc orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$



Exercice :

Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $A(2;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(-1;1;0)$, $E(1;-1;2)$.

Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{AB} = (2:0-2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = (-1;-2;-1)$$

Manifestement les coordonnées ne sont pas proportionnelles du fait des 2e coordonnées (-2 n'est pas un multiple de 0). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.(ABC) forme donc un plan

Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan (ABC). On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= (2;-2:2)\\
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} &= 2\times 2+0\times(-2)-2\times 2=0\\
\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} &= -1\times 2-2\times(-2)-1\times 2=0
\end{aligned}$$

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC).

3) Equation cartésienne d'un plan

Théorème : L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nul}$$

Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est alors un vecteur normal au plan.

ROC **Démonstration :**

- $\Rightarrow$ Soit un plan $\mathscr{P}$, un point A de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $M(x;y;z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= 0\\
a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) &= 0\\
ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A) &= 0
\end{aligned}$$

On pose $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$, on a alors

$$ax+by+cz+d=0$$

- $\Leftarrow$ Si on a l'équation : $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non tous nul, on peut toujours trouver un point $A(x_0;y_0;z_0)$ qui verifie l'équation

$$ax+by+cz+d=0$$

On a alors $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, par exemple, si $a\neq 0$, on peut prendre $x_0=-\dfrac{d}{a}$ et $y_0=z_0=0$.

Si $M(x;y;z)$ vérifie l'équation, alors : $ax+by+cz+d=0$, et en remplaçant $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a;b;c)$, la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul.

Exercice :

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.

$$\mathrm{A}(\sqrt{2};-2;5) \qquad \vec{n}(2;-3;-1)$$

2) Trouver une équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan $\mathscr{P}$ et passant par un point A donné :

$$\mathrm{A}(3;-1;0) \qquad \mathscr{P} \ : \ 2x-y+3z=0$$

3) Déterminer une équation cartésienne au plan médiateur du segment [AB].

$$\mathrm{A}(-1;1;0) \qquad \mathrm{B}(2;1;-1)$$

1) On doit avoir pour un point M de $\mathscr{P}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$$
$$2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-(z-5)$$
$$2x-3y-z-2\sqrt{2}-6+5=0$$
$$2x-3y-z-1-2\sqrt{2}=0$$

2) Si les plans $\mathscr{P}$ et (Q) sont parallèles, un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est aussi un vecteur normal de (Q). D'après l'équation de $\mathscr{P}$, on peut prendre comme vecteur normal $\vec{n}(2;-1;3)$. On a alors pour un point M de (Q) :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$$
$$2(x-3)-(y+1)+3(z-0)$$
$$2x-y+3z-6-1=0$$
$$2x-3y-z-7=0$$

Conclusion : une équation du plan (Q) est : $\quad 2x-3y-z-7=0$.

3) Le plan médiateur d'un segment est le plan dont les points sont équidistants des points A et B. Il passe alors orthogonalement par le milieu du segment [AB].

On détermine les coordonnées du milieu I de [AB]. Le plan recherché a alors pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\mathrm{I} = \left(\frac{-1+2}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};1;\frac{-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3;0,-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)-\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$3x-z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-z-2=0$$

Exercices

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Pour déterminer la position relative d'une droite et d'un plan, on remplace x, y et z dans l'équation du plan par les expressions de x, y et z des équations paramétriques de la droite.

- Si l'équation admet **une unique solution** pour le paramètre alors **la droite et le plan sont sécants** en un point d'intersection. On obtient les coordonnées en remplaçant la valeur du paramètre dans les équations paramétriques de la droite.

- Si l'équation n'admet **aucune solution** pour le paramètre alors **la droite et le plan sont strictement parallèles.**

- Si l'équation admet **une infinité de solutions** pour le paramètre alors **la droite est contenue dans le plan**.

Dans un repère orthonormé, on considère 2 points $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$ le plan P qui a pour équation $2x-y+3z-2=0$

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de P est $\vec{n}(2;-1;3)$.

(AB) et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a $\overrightarrow{AB}(-2;0;3)$ et comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times 2+3\times 3=5\neq 0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=-3+3t \end{cases}$ avec t réel.

Le point $M(x;y;z)$ intersection de (AB) et de P vérifie donc le système suivant :

$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=-3+3t \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ On a donc $2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0$ soit $5t-11=0$ soit $t=\frac{11}{5}$.

D'où $\begin{cases} x=1-2\times\frac{11}{5}=-\frac{17}{5} \\ y=2 \\ z=-3+3\times\frac{11}{5}=\frac{18}{5} \end{cases}$ Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\left(-\frac{17}{7};2;\frac{18}{5}\right)$.

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

- Deux plans sont **sécants** si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires sinon les plans sont parallèles.
- Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite d'intersection de deux plans sécants, on exprime deux des trois réels *x*, *y* et *z* en fonction du troisième qu'on choisit comme paramètre *t*.

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.

1) Démontrer que les plans P et P' sont sécants.
2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection *d*.

1) Un vecteur normal de P est $\vec{n}(-1;2;1)$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'(2;-1;3)$.
Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M(x;y;z)$ de *d*, intersection de P et de P', vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2y+z-5=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases} x=t \\ -t+2y+z-5=0 \\ 2t-y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y+3z=1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y+3(-2y+t+5)=1-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y-6y+3t+15=1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -7y=-14-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+\frac{5}{7}t \\ z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+\frac{5}{7}t \\ z=1-\frac{3}{7}t \end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de *d*, avec $t \in \mathbb{R}$.

Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.

Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

Un vecteur normal de P est $\vec{n}(2;4;4)$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'(2;-5;4)$.

$\vec{n}.\vec{n}'=2\times 2+4\times(-5)+4\times 4=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.