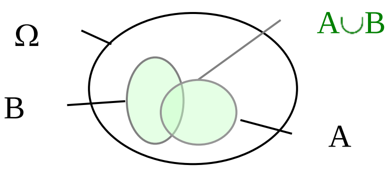
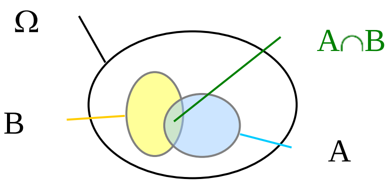
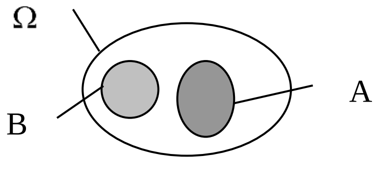
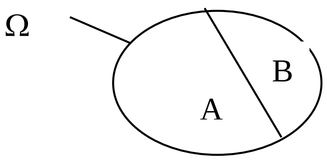
Chapitre III : Probabilités conditionnelles et indépendance

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Evénement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : «obtenir le nombre 3 » ; B = {3}
Evénement impossible : A = ∅	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 »
Evénement certain : A = Ω	événement qui se réalise toujours	L'événement D : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »
C est **la réunion** de A et de B : C = A ∪ B (on dit A **<u>ou</u>** B)	C est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : « obtenir un nombre au moins égal à 4 » ; E = { 4 ; 5 ; 6 } Soit l'événement F : « obtenir un nombre impair » ; F = { 1 ; 3 ; 5 } L'événement E ∪ F est « obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair » E ∪ F = { 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }
C est **l'intersection** de A et de B : C = A ∩ B (on dit A **<u>et</u>** B)	C est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement E ∩ F est « obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair » c'est à dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 4 » E ∩ F = { 5 }
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; A ∩ B = ∅ 	Les événements E et B sont incompatibles. E ∩ B = ∅
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. B = $\overline{A}$	A ∩ B = ∅ et A ∪ B = Ω $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires. F = $\overline{A}$

I - Rappels :

Définition

Ω : l'univers, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.

A : événement, sous-ensemble de l'univers Ω

$\overline{A}$: événement contraire, complémentaire de A dans Ω

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω, est la fonction p à valeur dans $[0\,;\,1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n événements élémentaires de Ω

- $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$
- $p(\varnothing) = 0$
- Pour tout événements A et B, on a les relations :

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Remarque :

On a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et aussi $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un schéma de Bernoulli lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli, c'est à dire une expérience aléatoire à 2 issues : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q = 1 - p$.
- Si l'on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès sur n expériences de Bernoulli, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, n et p sont appelés paramètres de la loi.

Notations compactes possibles : $X \longrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

On retient : probabilité d'obtenir exactement k succès sur n expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Dans ce cas : $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Quelques variantes fréquentes au Bac. . . : on suppose que $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès : $p(30 \leqslant X \leqslant 45) = p(X \leqslant 45) - p(X \leqslant 29)$

1 Compléter un tableau

Un essai de laboratoire porte sur 35 cobayes et 15 rats. Après 5 jours, 40 % des cobayes et 20 % des rats sont malades.

a) Recopier et compléter le tableau ci-contre.

b) Quel est, arrondi au dixième, le pourcentage de rats parmi les animaux sains ?

	Cobayes	Rats	Total
Malades			
Sains			
Total			50

2 Calculer des probabilités

Une étude statistique a montré que, pour un élève de Terminale générale qui se présente aux concours d'entrée de deux instituts en soins infirmiers, la probabilité d'être reçu est 0,2 pour l'institut A et 0,1 pour l'institut B. De plus, la probabilité d'être reçu dans les deux instituts est 0,05.

a) Quelle est la probabilité, pour un tel élève, d'être reçu à au moins l'un des deux instituts ?

b) En déduire la probabilité qu'un élève ne soit reçu à aucun des deux instituts.

3 Étudier une variable aléatoire

Parmi les 400 billets d'une loterie, dix font gagner un bon d'achat de 5 €, huit un bon d'achat de 10 €, cinq un bon d'achat de 20 € et un, un bon d'achat de 50 €. Les autres billets sont perdants.
Un joueur achète un billet au prix de 2 €.
On note X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur diminué du prix du billet.

a) Donner les valeurs prises par X et déterminer sa loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

c) Ce jeu est-il équitable ?

4 Utiliser une loi binomiale

Damien joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est 0,3.
Il joue 7 parties successives (les parties sont indépendantes).
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de parties gagnées par Damien.

a) Justifier que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $P(X = 2)$. En donner l'arrondi au millième et interpréter ce résultat.

c) Calculer la probabilité que Damien gagne au moins une partie.

d) Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

II - Probabilités conditionnelles

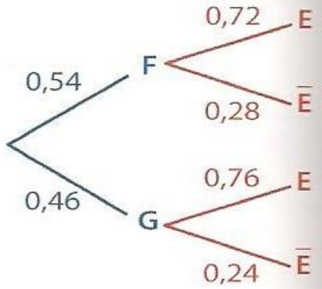
1. Définition et propriétés (Transmath p 352)

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles (F). Parmi les filles, 72 % sont externes (E) alors que parmi les garçons (G), le pourcentage d'externes est 76 %.

On interroge au hasard un élève et on s'intéresse aux deux critères : sexe (F ou G) et qualité (E ou $\overline{E}$).

L'univers de cette expérience aléatoire est donc l'ensemble des élèves du lycée, et chaque élève a la même probabilité d'être interrogé.

La situation peut être représentée par le graphique ci-dessous appelé arbre pondéré.



Dessin des branches

- Au départ, il y a deux possibilités, F ou G, représentées par deux branches.
- Au nœud F, il y a deux cas, E ou $\overline{E}$, selon que la fille est externe ou non.

De même à partir du nœud G.

Inscription des probabilités

- Sur la branche —— F, on inscrit $P(F) = 0,54$.
- Sur la branche —— E, on inscrit la probabilité, pour une fille, d'être externe : 0,72.
  On la note $P_F(E)$, ce qui se lit « probabilité de E sachant F ».
- Sur la branche —— $\overline{E}$, on inscrit la probabilité, pour une fille, de ne pas être externe : 0,28.
  On la note $P_F(\overline{E})$.
- Parmi les filles, 72 % sont externes et 28 % ne le sont pas, donc $P_F(E) + P_F(\overline{E}) = 1$.
- On complète de même l'arbre à partir de G.

Événement représenté par un chemin

Le chemin $\xrightarrow{0,54} F \xrightarrow{0,72} E$ représente l'événement « L'élève est une fille **et** elle est externe ». Cet événement est $F \cap E$. Calculons sa probabilité.

Si N désigne l'effectif du lycée, alors le nombre de filles est $0,54 \times N$ et le nombre de filles externes est $0,72 \times (0,54 \times N) = 0,54 \times 0,72 \times N$.

Or, il y a équiprobabilité, donc $P(F \cap E) = \dfrac{0,54 \times 0,72 \times N}{N} = P(F) \times P_F(E)$. Ainsi :

$P(F \cap E)$ est le produit des probabilités inscrites sur le chemin $\xrightarrow{0,54} F \xrightarrow{0,72} E$ et l'égalité $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E)$ signifie que $P_F(E) = \dfrac{P(F \cap E)}{P(F)}$.

On généralise cette idée.

Définition :

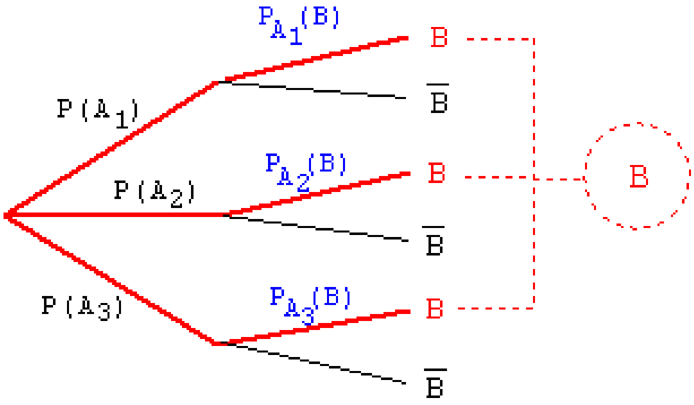
A et B sont deux événements d'une même expérience avec B de probabilité non nulle.
On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé noté $p(A/B)$ ou $p_B(A)$ le réel : $p_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{p(B)}$.

Propriétés :

- Pour tout événement A $0 \leq P_B(A) \leq 1$
- $p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$
- Dans une situation d'équiprobabilité, $p_B(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables à } A \cap B}{\text{nombre d'issues favorables à B}}$
- $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$ (si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$)

2. **Application aux arbres pondérés**

Les principales règles de construction d'un arbre pondéré sont :



- Au premier niveau d'un arbre de probabilités, on indique les probabilités des événements A_1, A_2 et A_3 ; au second niveau, les probabilités conditionnelles.

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 : $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$.

- La probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités des branches de ce chemin, ainsi : $p(A_1 \cap B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)$

Exemple :

Trois candidats A, B et C se présentent à une élection.

Ils obtiennent respectivement la moitié, les trois dixièmes et le cinquième des suffrages.

D'autre part, on sait que 50 % des électeurs de A, 30 % des électeurs de B et 40 % des électeurs de C sont des hommes.

On interroge au hasard une personne s'étant prononcée pour l'un des 3 candidats.

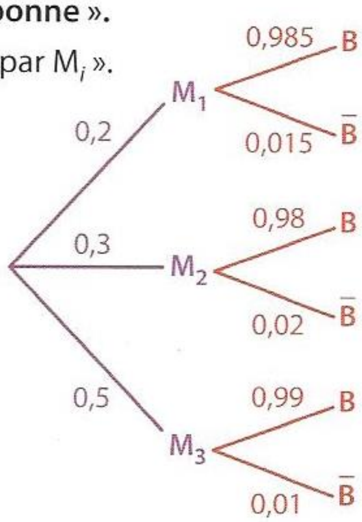
1. Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité d'interroger un homme ayant voté pour le candidat C.

3. Formule des probabilités totales (Transmath p353)

Exemple. Trois machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20 %, 30 % et 50 % de la production d'une entreprise. On estime à 1,5 %, 2 % et 1 % les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3. On choisit une pièce au hasard dans la production.

L'objectif est de calculer la probabilité de l'événement B : « La pièce est bonne ».

Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'événement : « La pièce est produite par M_i ».



- Illustrons la situation par un arbre pondéré.

La pièce choisie est produite par l'une des machines, d'où les branches initiales menant à M_1, M_2 et M_3.
À partir de chaque nœud M_i, soit la pièce est bonne (B), soit elle est défectueuse $(\overline{B})$. Plaçons-nous au nœud M_1.
On connaît $P_{M_1}(\overline{B}) = 0{,}015$, donc $P_{M_1}(B) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.
D'où les probabilités inscrites sur M_1 — $\overline{B}$ et M_1 — B.
Pour les autres branches, on procède de même.

- Calculons les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'événement B.

— M_1 — B, — M_2 — B, — M_3 — B représentent les événements $M_1 \cap B$, $M_2 \cap B$ et $M_3 \cap B$.
Ainsi, B est la réunion de ces événements deux à deux incompatibles ; d'où :

$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B) \quad [\mathbf{1}].$$

$P(M_1 \cap B)$ est le produit des probabilités inscrites sur les branches du chemin — M_1 — B ;
donc $P(M_1 \cap B) = P(M_1) \times P_{M_1}(B) = 0{,}2 \times 0{,}985$.
De même, $P(M_2 \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}98$ et $P(M_3 \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}99$.
Ainsi, $P(B) = 0{,}2 \times 0{,}985 + 0{,}3 \times 0{,}98 + 0{,}5 \times 0{,}99 = 0{,}986$.

- La méthode de calcul définie par la formule [**1**] est illustrée par le tableau.

– On remplit les cases correspondant aux probabilités du type $P(M_i \cap B)$.
– La probabilité de B est la somme des probabilités des événements $M_i \cap B$.

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0{,}2 \times 0{,}985$	$0{,}2 \times 0{,}015$	$P(M_1)$
M_2	$0{,}3 \times 0{,}98$	$0{,}3 \times 0{,}02$	$P(M_2)$
M_3	$0{,}5 \times 0{,}99$	$0{,}5 \times 0{,}01$	$P(M_3)$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Définition :

Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2.

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $Ai \neq 0$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ; 2 ; \dots n\}$, $Ai \cap Aj \neq \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

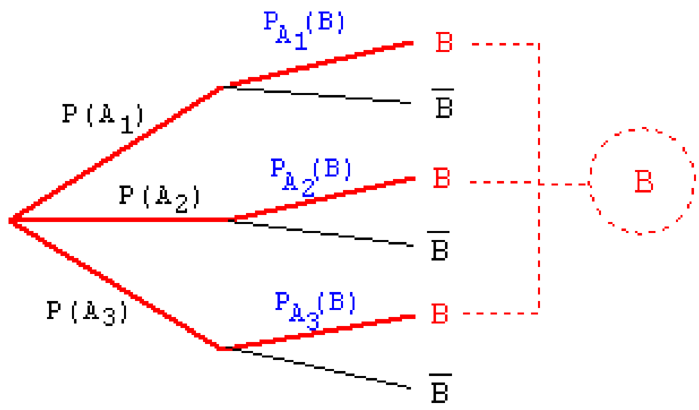
Propriété : Formule des probabilités totales :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une **partition** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$
Ou $P(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots\dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

Conséquence dans l'utilisation d'un arbre pondéré

- La probabilité d'un événement écrit à plusieurs extrémités du dernier niveau de branches est la somme des probabilités des chemins aboutissant à cet événement : $p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+p(A_3\cap B)$



Exemple :

Reprendre l'exemple précédent (élection)

3. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.
4. La personne interrogée est une femme.

   Calculer la probabilité qu'elle ait voté pour le candidat A.

Exercice : ***« Efficacité d'un test »***

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité
   a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ? *(0,03×0,95=0,0285)*
   b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ? *(0,97×0,99=0,9603)*
   c) qu'il ait un test positif ? *(0,03×0,95+ 0,97×0,01=0,0382)*
   d) qu'il ait un test négatif ? *(1-0,0382=0,9618)*
3. Calculer la probabilité
   a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ? *(0,97×0,01/0,0382=0,2539)*
   b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ? *(0,03×0,05/0,9618=0,0016)*

   Interpréter les résultats obtenus aux questions 3a et 3b.

III - Indépendance :

Définition :

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Théorème :

A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.
A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$ ou $p_A(B) = p(B)$.

Démonstration :

- si $p_B(A) = p(A)$ comme $p(A \cap B) = p_B(A)p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$
- si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, comme $p(B) \neq 0$, $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$ c'est-à-dire $p_B(A) = p(A)$

Remarques :

1) A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.

2) Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

   - 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
   - 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice :

On lance un dé équilibré à 6 faces.
Si l'on obtient 6, on tire au hasard un jeton d'une urne U1 qui contient 2 jetons rouges et 1 jeton blanc.
Sinon, on tire au hasard un jeton d'une urne U2 qui contient 4 jetons rouges, 1 jeton blanc et 1 jeton vert.

a. Les événements A : « obtenir 6 » et R : « tirer un jeton rouge » sont-ils indépendants ?
b. Les événements A : « obtenir 6 » et V : « tirer un jeton vert » sont-ils indépendants ?

Théorème :

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les événements :

1) $\overline{A}$ et B 2) A et $\overline{B}$ 3) $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration exigible :

A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (*)

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers., donc d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

D'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ soit d'après (*) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$.

Ainsi $P(\overline{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A}) \times P(B)$; donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Pour le 2) il suffit de changer les rôles de A et B.

Pour le 3), d'après 1) $\overline{A}$ et B sont indépendants, donc d'après 2) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.