LOIS NORMALES

I Loi normale centrée réduite

La loi binomiale est très utilisée en modélisation, mais il s'agit d'une loi discrète et certaines probabilités sont impossibles à calculer pour des valeurs de n assez élevées.

Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences (n > 50 par exemple) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite (p > 0, 1), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une ***courbe en cloche*** ou ***courbe de Gauss***. On passe ainsi d'une distribution discrète à une distribution continue beaucoup plus souple.

Cette loi normale, associée à la « courbe en cloche », a été définie au début du XIXᵉ siècle par le mathématicien allemand Gauss lorsqu'il étudia la distribution des erreurs d'observation de l'astéroïde Cérés. A la même époque, elle fut aussi décrite par le scientifique français Laplace qui reprit et compléta les travaux du mathématicien de Moivre en calcul de probabilités.

1. Théorème de Moivre – Laplace

Lorsqu'une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour écart type (non nul) σ, la variable aléatoire Z, définie par $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, a pour espérance 0 et pour écart type 1.

La variable aléatoire Z est appelée « **variable centrée réduite** associée à X ».

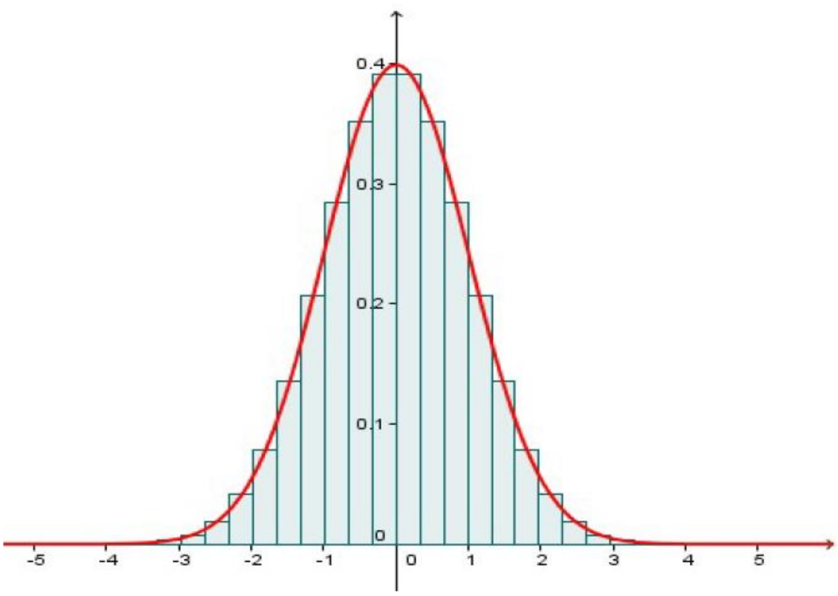
Or si X suit la loi $B(n,p)$, on a vu que son espérance est $E(X) = np$ et que son écart type est $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème : Théorème de Moivre-Laplace

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et Z la variable aléatoire tel que : $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



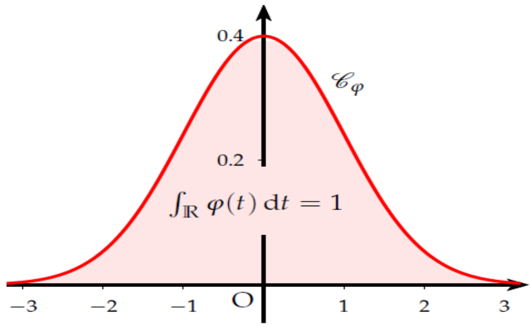
2. Densité de probabilité de Laplace-Gauss

Définition :

On appelle **fonction de Laplace-Gauss** la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque : Cette fonction φ correspond bien à une densité de probabilité :

- φ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$).
- Cette fonction est paire et admet en 0 un maximum : $\varphi(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\simeq 0,4$
- Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. Sa démonstration est admise. Il faut cependant savoir qu'il n'existe pas de primitive s'exprimant avec des fonctions élémentaires pour cette fonction et que le calcul de l'aire sous la courbe demande des méthodes plus ou moins détournées tel un changement de variable.
- La courbe $\mathscr{C}_\varphi$ est appelée **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**.



Comme la fonction φ est paire, on a alors :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

3. Loi normale centrée réduite

Définition :

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, si elle admet pour densité de probabilité la **fonction de Laplace-Gauss** φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Calculs de probabilités

Avec la calculatrice !

	Casio	TI
Syntaxe	Touche $\boxed{\text{OPTN}}$ puis choisir *Stat*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu *Distrib* ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{vars}}$) Puis choisir *normalFRép ou FracNormale*
$p(a<X<b)$	Choisir Ncd : **NormCD(a,b)**	**NormalFRép(a,b)**
Nombre réel k tel que $p(X<k)=c$	Choisir InvN : **InvNormCD(c)**	**FracNormale (c)**

Exemples :

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.
Les résultats seront arrondis au millième

a. Calculer $p(X=1)$, $p(-1,5 \le X \le 2,2)$, $p(X<1,3)$ et $p(X>0,22)$

b. Déterminer le réel a tel que $p(X \le a)=0,1256$.

c. Déterminer le réel b tel que $p(X>b)=0,2347$.

a. $p(X=1)=0$ car X est une variable aléatoire à densité

Probabilité	**Casio**	**TI**	**Résultat**
$p(-1.5<X<2.2)$	NormCD(–1.5,2.2)	NormalFRép(–1.5,2.2)	0,919
$p(X<1.3)$	$\text{NormCD}\left(-1\text{E}99,1.3\right)$	$\text{NormalFRép}\left(-10^{99},1.3\right)$	0,903
$p(X>0,22)$	$\text{NormCD}\left(0.22,1\text{E}99\right)$	$\text{NormalFRép}\left(0.22,10^{99}\right)$	0,413

b.

	Casio	**TI**	**Résultat**
Valeur de a	InvNormCD(0,1256)	FracNormal(0,1256)	–1,147

c. On sait que $p(X>b)=1-p(X\le b)$ donc $p\left(X>b\right)=0,2347 \Leftrightarrow 1-p(X\le b)=0,2347 \Leftrightarrow p(X\le b)=0,7653$

	Casio	**TI**	**Résultat**
Valeur de b	InvNormCD(0,7653)	FracNormal(0,7653)	0,723

5. Espérance et variance

Théorème : Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors son espérance est nulle et sa variance est égale à 1

Remarque : C'est pour cette raison que cette loi normale est centrée ($\text{E}(X)=0$) et réduite ($\text{V}(X)=1$)

On dit que X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

6. Probabilité d'intervalle centré en 0

Théorème : X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

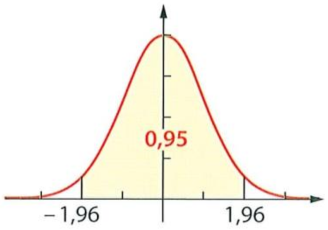
$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

Démonstration (à connaître)

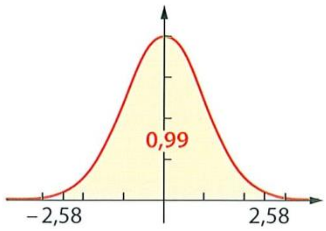
> D'après la symétrie de la courbe, on a pour tout réel x positif, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(0 \leq X \leq x) = 2\int_0^x f(u)du$.
> On pose pour tout réel x positif, $H(x) = 2\int_0^x f(u)du$.
> H est continue sur $\mathbb{R}$. H est aussi strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car $H'(x) = 2f(x)$ pour tout réel x positif. On a $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et $H(0) = 0$.
> Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ on a $1-\alpha \in]0;1[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α strictement positif tel que $H(u_\alpha) = 1-\alpha$.

Valeurs à connaître

En particulier on a $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Cela signifie que $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ et $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.
Cela veut aussi dire qu'environ 95% des réalisations se trouvent dans l'intervalle $[-1,96, 1,96]$ et 99% se trouvent dans l'intervalle $[-2,58; 2,58]$.



$u_{0,05} \approx$ **1,96**



$u_{0,01} \approx$ **2,58**

Exemple : X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
Déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $P(x \in \mathrm{I}) = 0,8$.
On donnera les bornes de l'intevalle avec une précision de 10^{-2}.

On a donc : $1-\alpha = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0,2$

On doit donc avoir : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9$.

A l'aide de la calculatrice avec la fonction "**FracNorm(0,9)**" ou à l'aide d'une table, on trouve :

$$u_\alpha \simeq 1,28 \quad \text{donc} \quad \mathrm{I} = [-1,28; 1,28]$$

II Loi normale générale

1. Présentation

Définition :

Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif.

Dire que la variable aléatoire **X suit la loi normale de paramètres μ et σ ²** signifie que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$(0 ;1)**.

On dit que **X suit la loi $\mathcal{N}$(μ ;σ ²)**

2. Espérance et variance

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors **son espérance est μ et sa variance σ ²**

Démonstration : De la linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$E(Z) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0 \quad \text{comme} \quad E(Z) = 0 \quad \text{alors} \quad E(X) = \mu$$

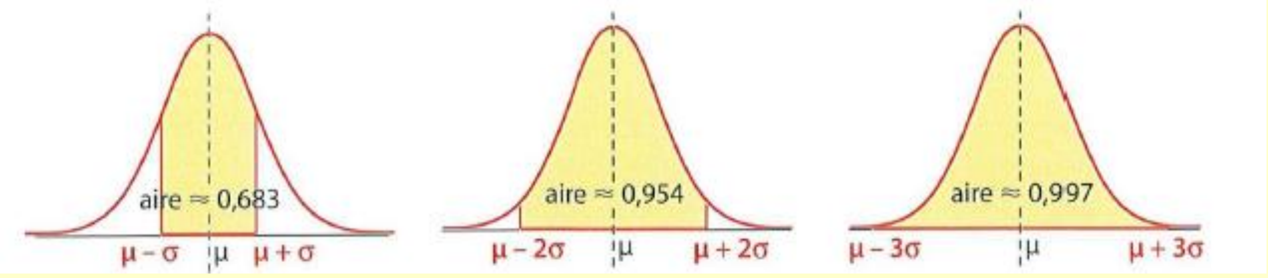
De plus, comme $V(aX) = a^2V(X)$, on a :

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) \quad \text{comme} \quad V(Z) = 1 \quad \text{alors} \quad V(X) = \sigma^2$$

Propriété : intervalles « un, deux, trois sigmas »

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors

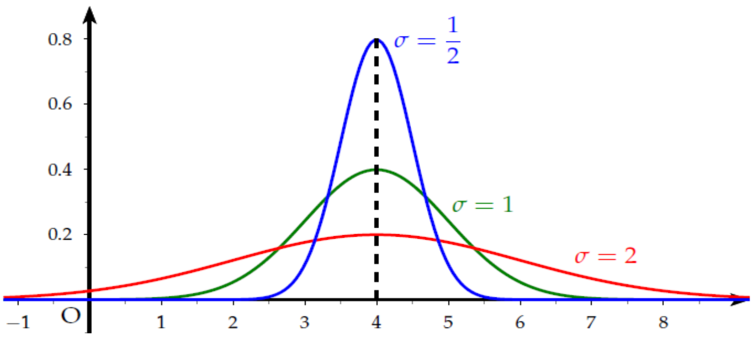
- $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$ à 10^{-3} près
- $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,954$ à 10^{-3} près
- $p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0,997$ à 10^{-3} près



Remarques importantes :

- Attention à ne pas confondre, selon les données de l'énoncé, σ et σ^2 .
- La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie vertical est la droite $x = \mu$.
- La valeur de σ est reliée à l'étalement de la courbe : plus σ est petit, plus la cloche est reserrée autour de son axe se symétrie et moins la dispersion est grande

Voici ci-dessous les courbes des densités correspondantes à une espérance de 4 et aux écarts types respectifs de : $\frac{1}{2}$, 1 et 2.



On constate que plus l'écart type est important, plus la courbe de densité est évasée et plus le maximum est petit. En effet un écart type important signifie que la dispersion des données est importante.

Calculs de probabilités pour une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\mu\ ;\sigma^2)$.

	Casio	TI
Syntaxe	Touche $\boxed{\text{OPTN}}$ puis choisir *Stat*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu *Distrib* ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{vars}}$) Puis choisir *normalFRép ou FracNormale*
$p(a < X < b)$	Choisir Ncd : **NormCD(a,b,σ,μ)**	**NormalFRép(a,b, μ,σ)**
Nombre réel k tel que $p(X < k) = c$	Choisir InvN : **InvNormCD(c,σ,μ)**	**FracNormale (c, μ,σ)**

Exemples :

1)

Exemple : Les températures du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6 °C.
Un personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température dans les cas suivants :

a) températures inférieures à 16 °C

b) températures comprises entre 20°C et 24,5°C

c) températures supérieures à 21°C.

Soit X la variable donnant la température un jour de juillet.

a. $P(X \leq 16) \simeq 0,271$

b. $P(20 \leq X \leq 24,5) \simeq 0,268$

c. $P(X \geq 21) \simeq 0,218$.

2) $X \sim N(15;2)$

a. Déterminer une valeur approchée de $P(13 \leq X \leq 14)$.

b. Déterminer un intervalle I centré en 15 tel que $P(X \in I) \simeq 0,68$.

a. L'écart type est $\sigma = \sqrt{2}$. $P(13 \leq X \leq 14) \simeq 0,161$.

b. La probabilité 0,68 correspond environ à $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

On peut prendre l'intervalle $\left[15 - \sqrt{2}; 15 + \sqrt{2}\right]$.

3) Lors d'un test de connaissances, 70 % des individus ont un score inférieur à 60 points. De plus les résultats suivent une loi normale d'écart type 20. Calculer l'espérance de cette loi.

On sait que $X \sim N(\mu;20)$ *et que* $P(X \leq 60) = 0,7$

Soit $Z = \dfrac{X - \mu}{20}$ *;* $P(X \leq 60) = P\left(Z \leq \dfrac{60 - \mu}{20}\right) = 0,7$ *où* $Z \sim N(0;1)$.

A la calculatrice on obtient $\dfrac{60 - \mu}{20} \simeq 0,52$ *et donc* $\mu \simeq 49,6$.

4) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque garçon d'un lycée, associe sa taille en cm. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 178 et d'écart-type σ .
Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité que celui-+ci ait une taille comprise entre 174 cm et 182 est 0,5. Déterminer la valeur de σ , arrondie à l'entier.

$$P(174 \leq Y \leq 182) = 0{,}5 \Leftrightarrow P\left(\frac{174-178}{\sigma} \leq Z \leq \frac{182-178}{\sigma}\right) = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{4}{\sigma} \approx 0{,}674 \Leftrightarrow \sigma \approx 6$$

5) Approximation d'une loi binomiale.

On utilise le théorème de Moivre – Laplace.

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale lorsque l'on aura les conditions suivantes :

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

On lance 180 fois un dé à jouer et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. Calculer $P(27 \leq X \leq 36)$.

Soit $X \sim B\left(180; \frac{1}{6}\right)$ mais on a *n≥ 30 ; np = 30 ≥ 5 et n(1 – p) = 150 ≥ 5*

on peut donc approcher le résultat à l'aide de la loi normale centrée réduite.

E(X) = 30 et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 5$ *; on pose donc* $Z = \frac{X-30}{5}$*.On assimile Z à la loi N(0 ; 1).*

$$P(27 \leq X \leq 36) = P\left(\frac{27-30}{5} \leq Z \leq \frac{36-30}{5}\right) = P(-0{,}6 \leq Z \leq 1{,}2) \simeq 0{,}611.$$

NB : cette méthode respecte le théorème qui passe par la loi centrée réduite ; on peut toutefois utiliser la loi normale N(30 ;5²), garder l'intervalle [27 ; 36] et obtenir le résultat.