# Chapitre VII : Fonction logarithme népérien

## I – La fonction logarithme népérien

On a vu que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, ce qui signifie que, quel que soit le réel *m*, l'équation $e^x = m$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
(C'est vers 1550 que l'écossais Napler, ou Néper, invente les logarithmes qui portent son nom, sous une forme un peu différente de ce qui est fait dans ce chapitre).

### 1. Définition

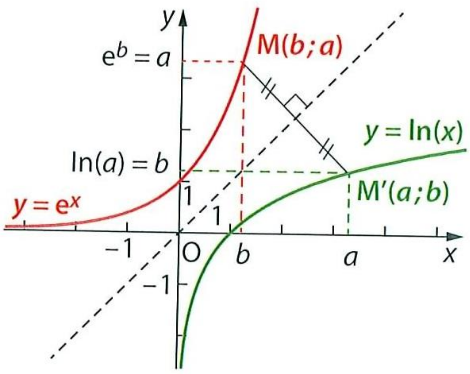
**Définition**
La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0;+\infty[$.
Elle associe à tout nombre réel strictement positif *x* le nombre *y*, noté $\ln x$, dont l'exponentielle est *x*.
On note $y = \ln x$.

**Conséquences :**

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel *x* $\ln\left(e^x\right) = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et aussi $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).
- Pour tout réel $x > 0$ et tout nombre réel *y*, on a $y = \ln x$ équivaut à $e^y = x$.

**Conséquence graphique :**

Dire que le point M( b ; a) appartient à la courbe représentative de la fonction exp, (soit $a = e^b$) revient à dire que $b = \ln a$, c'est-à-dire que le point M'( a ; b) appartient à la courbe représentative de la fonction ln. Dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.




*Remarque :* On dit que les fonctions ln et exp sont **réciproques** l'une de l'autre.

***Exemples :***

Dans chaque cas, résoudre l'équation ou l'inéquation.
**a)** $\ln x = -2$ **b)** $\ln(3x+1) > 3$

**Solution**
**a)** Pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln x = -2$ équivaut à $x = e^{-2}$.
Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^{-2}\}$.
**b)**
On résout l'inéquation dans l'ensemble E des réels $x$ tels que $3x + 1 > 0$, donc $E = \left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$. Pour tout $x$ de E, $\ln(3x+1) > 3$ équivaut à $3x + 1 > e^3$ c'est-à-dire $x > \frac{1}{3}(e^3 - 1)$. Tous ces nombres sont dans E, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]\frac{1}{3}(e^3-1) ; +\infty\right[$.

### 2. Sens de variation

**Théorème :** La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$

*Démonstration :*

a et b sont deux réels strictement positifs tels que $0<a<b$, c'est-à-dire $e^{\ln a}<e^{\ln b}$.
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\ln a<\ln b$.
Par conséquent, la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

**Conséquences :**

1) Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a

$$\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b \qquad \text{et} \qquad \ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$$

2) Si $0<a<1$ alors $\ln a<0$

Si $a>1$ alors $\ln a>0$

***Exemple :***

Résoudre l'inéquation $\ln(x^2-2)\leqslant \ln x$.

**Solution**

- On résout l'inéquation dans l'ensemble des nombres réels tels que $x^2-2>0$ **et** $x>0$.

| $x$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2$ | + | 0 | − | 0 | + |

Donc $E=\left]\sqrt{2}\ ;+\infty\right[$.

- Pour tout nombre réel $x$ de E, $\ln(x^2-2)\leqslant \ln x$ équivaut à $x^2-2\leqslant x$ c'est-à-dire $x^2-x-2\leqslant 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

D'après le tableau de signes ci-dessus, les nombres de E tels que $x^2-x-2\leqslant 0$ sont les nombres de $\left]\sqrt{2}\ ;2\right]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left]\sqrt{2}\ ;2\right]$.

## II – Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

### 1. Relation fonctionnelle

**Propriété :** Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

*Démonstration :*

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs:

$e^{\ln(ab)}=ab$ et $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=a\times b$

Donc $e^{\ln(ab)}=e^{\ln a+\ln b}$ d'où $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

## *Méthode : Résolution d'une (in)équation avec ln*

**1)** Chercher l'ensemble des réels pour lesquels les « ln » sont définies

**2)** Ecrire, si nécessaire, l'(in)équation sous la forme ln u = ln v (ou ln u > ln v)

**3)** Résoudre l'(in)équation u = v (ou u > v)

*Exemple :*

Résoudre : 1) $\ln(x+2)=\ln(3-x)$

2) $\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2$

3) $(\ln x)^2-4\ln x\leq 0$

1) L'équation ne peut admettre de solutions que sous les conditions $x+2>0$ et $3-x>0$ soit $x\in\left]-2;3\right[$

L'équation devient équivalente sur $\left]-2;3\right[$ à : $x+2=3-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Cette solution est bien dans $\left]-2;3\right[$ donc $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2) L'équation ne peut admettre de solutions que sous les conditions $x>0$ et $x-3>0$ soit $x\in\left]3;+\infty\right[$

Avec les propriétés algébriques de la fonction ln, l'équation devient équivalente sur $\left]3;+\infty\right[$ à : $\ln\left[x(x-3)\right]=\ln 4$ soit $x^2-3x-4=0$. Or les solutions de cette équation sont – 1 et 4. Or on doit avoir $x>3$ donc la seule solution est 4.

3) L'équation admet des solutions si $x>0$ On pose $X=\ln x$. L'inéquation devient $X^2-4X\leq 0$
$X^2-4X\leq 0\Leftrightarrow X\in\left[0;4\right]$ alors $x$ solution $\ln x\in\left[0;4\right]$ soit $0\leq\ln x\leq 4$ soit $e^0\leq x\leq e^4$

Les solutions sont donc dans l'intervalle $\left[1;e^4\right]$

### 2. Propriétés algébriques

**Propriétés :**

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs et pour tout entier relatif $n$ , on a les propriétés suivantes :

- $\ln\dfrac{1}{b}=-\ln b$ et $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$
- $\ln a^n=n\ln a$
- $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

*Démonstration :*

- On a $\dfrac{1}{b}\times b=1$, donc $\ln\left(\dfrac{1}{b}\times b\right)=\ln 1=0$ soit $\ln\dfrac{1}{b}+\ln b=0$ d'où la formule.

  On a $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$, donc $\ln\left(a\times\dfrac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\dfrac{1}{b}=\ln a-\ln b$
- Démo par récurrence avec $n$ entier naturel puis en déduire pour n < 0
- On a $a=\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ d'où $\ln a=\ln\left(\sqrt{a}\right)+\ln\left(\sqrt{a}\right)$ donc $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

**Exemples :**

- Exprimer en fonction de $\ln 3$ chacun des nombres suivants :

a) $\ln\sqrt{27}$ b) $\ln\frac{1}{9}$ c) $\ln 63 - \ln 7$ d) $4\ln 6 - \ln 16$

**Solution**

a) $\ln\sqrt{27} = \frac{1}{2}\ln 27 = \frac{1}{2}\ln(3^3) = \frac{1}{2}\times 3\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 3$.

b) $\ln\frac{1}{9} = -\ln 9 = -\ln(3^2) = -2\ln 3$.

c) $\ln 63 - \ln 7 = \ln\frac{63}{7} = \ln 9 = \ln(3^2) = 2\ln 3$.

d) $4\ln 6 - \ln 16 = \ln(6^4) - \ln 16$

donc $4\ln 6 - \ln 16 = \ln 1296 - \ln 16 = \ln\frac{1296}{16} = \ln 81$

soit $4\ln 6 - \ln 16 = \ln(3^4) = 4\ln 3$.

> • On applique $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$ avec $b = 9$.

> • Avec $a > 0$ et $b > 0$,
> $$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$
> Attention, à ne pas confondre avec $\frac{\ln a}{\ln b}$.

- **Résoudre une inéquation $q^n \geqslant k$ d'inconnue $n$ ($n \in \mathbb{N}$)**

La concentration de toxines dans le sang des poissons d'un lac augmente de 5 % par an.
Ces poissons sont menacés dès lors que la concentration atteint 4 ppm (partie par million) ou plus.
Si la concentration de toxines est actuellement de 2 ppm, dans combien d'années ces poissons seront-ils menacés ?

**Solution**

On note $c_n$ la concentration de toxines en ppm l'année $n$.
La suite $(c_n)$ est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $c_0 = 2$.
Pour tout $n \geqslant 0$, $c_n = c_0\, q^n = 2 \times 1{,}05^n$.
On cherche $n$ tel que $c_n \geqslant 4$, c'est-à-dire $2 \times 1{,}05^n \geqslant 4$, ce qui est équivalent à $1{,}05^n \geqslant 2$.
Résoudre cette inéquation équivaut à résoudre $\ln(1{,}05^n) \geqslant \ln 2$ (car ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$) c'est-à-dire $n\ln 1{,}05 \geqslant \ln 2$
soit $n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$ (car $\ln 1{,}05 > 0$).
Or $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$, donc ces poissons seront menacés dans 15 ans.

> Pour résoudre une inéquation $q^n \geqslant k$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $k > 0$) :
> • on prend le logarithme népérien de chaque membre et on résout $\ln(q^n) \geqslant \ln k$ c'est-à-dire $n\ln q \geqslant \ln k$ ;
> • on veille au signe de $\ln q$ au moment de diviser par $\ln q$.

## III – Etude de la fonction logarithme népérien

### 1. Dérivée

On admet que la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

**Propriété :** La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

*Démonstration:*

Cherchons la limite en $a$ du quotient $r(x)=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\,(x\neq a)$

Posons $\ln x = X$ et $\ln a = A$ : d'où $\lim\limits_{x\to a} X = A$ puisque la fonction ln est continue.

Le quotient $r$ prend la forme $\dfrac{X-A}{e^X-e^A}$. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{X\to A}\dfrac{X-A}{e^X-e^A}=e^{-A}$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to a} r(x)=\dfrac{1}{e^A}=\dfrac{1}{a}$. Ainsi, la fonction ln est dérivable en $a$ et le nombre dérivé en ce point est $\dfrac{1}{a}$ ; pour tout $x>0$ : $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

***Exemples :***

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur $]0;+\infty[$ :

$$f(x)=x\ln x \qquad g(x)=(\ln x+3)^2 \qquad h(x)=\frac{\ln x}{x}$$

## 2. Limites et courbe représentative

**Propriété :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

*Démonstration :*

- Soit A un réel strictement positif : peut-on trouver $x$ tel que $\ln x > A$ ?
La fonction exponentielle étant strictement croissante, pour que $\ln x > A$, il suffit que $e^{\ln x} > e^A$, soit $x > e^A$ d'où le résultat.
- Posons $X=\dfrac{1}{x}$. On a $\ln X = -\ln x$ et la limite de X lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives est $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$

En résumé, on a le tableau de variations suivant :

| $x$ | 0 | | 1 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x)$ | ‖ | + | 1 | + | $\frac{1}{e}$ | + | |
| $\ln(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

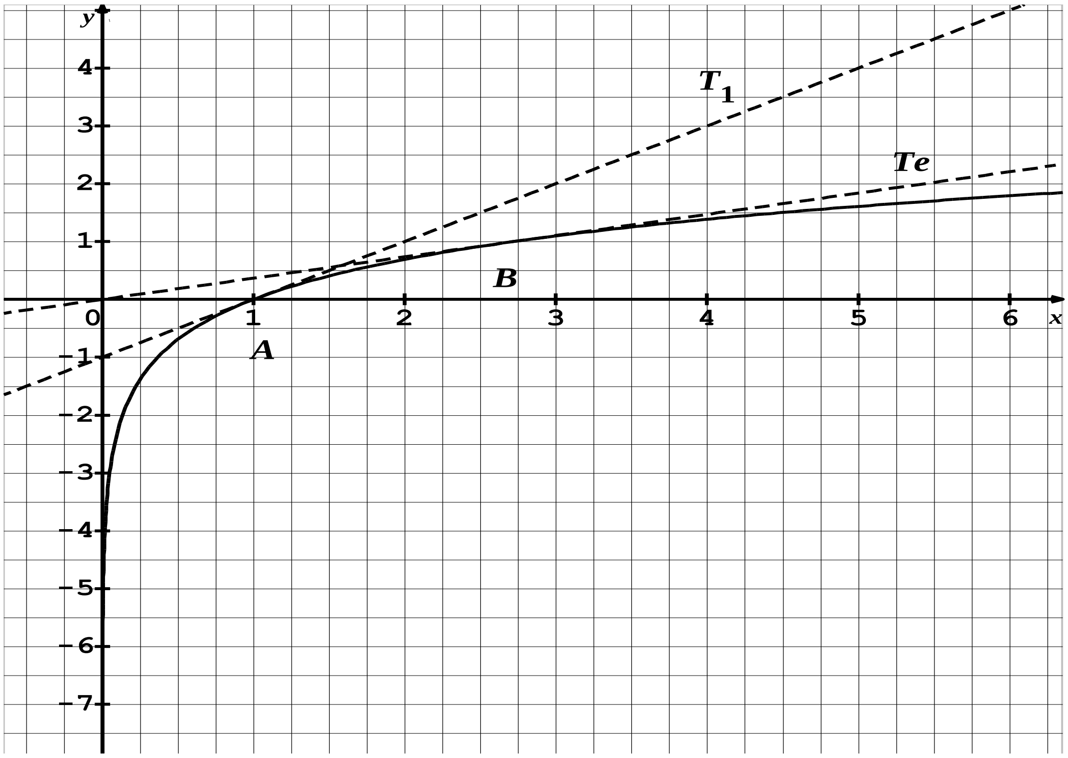
***Remarque*** : l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln

Tangente $(T_1)$ à $C_{\ln}$ au point A ( 1 ; 0 )

$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$ avec $a=1$ ; $f'(a)=1$ et $f(1)=0$ donc $(T_1)$ : $y=1(x-1)+0$ soit $(T_1)$ : $y=x-1$

Tangente $(T_e)$ à $C_{\ln}$ au point B ( $e$ ; 1 )

$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$ avec $a=e$ ; $f'(e)=\dfrac{1}{e}$ et $f(e)=1$ donc $(T_e)$ : $y=\dfrac{1}{e}(x-e)+1$ soit $(T_e)$ : $y=\dfrac{1}{e}x$




### 3. D'autres limites (croissances comparées)

**Propriétés :** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (c. c.) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ (c. c.)

*Démonstration :*

- La fonction $\ln$ est dérivable en 1 ; en ce point le nombre dérivé est 1, donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=1$ d'où la formule

- Posons $t=\ln x$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} t=+\infty$.

On a $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{t}{e^t}$ qui est l'inverse de $\dfrac{e^t}{t}$, or $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ donc la limite de l'inverse est 0.

- Posons $t=\ln x$, on a alors $x\ln x=te^t$, or quand $x$ tend vers 0 par valeurs positives, $t$ tend vers $-\infty$ or $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$ d'où le résultat

***Exemples :***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+4-\ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x-5)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x+4}$

## 4. Fonctions composées avec la fonction $\ln$

**Propriétés :**

Soit $u$ une fonction dérivable et **strictement positive** sur l'intervalle I.

On considère la fonction composée $f$ par $f(x)=\ln[u(x)]$

- La fonction $f$ est définie sur I et dérivable sur cet intervalle.

  $f'(x)=(\ln[u(x)])'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et le signe de $f'(x)$ est celui de $u'(x)$

- $a$ désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$

  si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x))=+\infty$

  si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ avec $u(x)>0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x))=-\infty$

  si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ ( $b>0$ ) alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x))=\ln b$

*Démonstration :*

- d'après la dérivation d'une fonction composée,

  on a : $f'(x)=(\ln[u(x)])'=u'(x)\times\ln'[u(x)]=u'(x)\times\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

  Puisque $u(x)>0$, $g'(x)$ et $u'(x)$ sont de même signe.
- Ce sont des applications des règles opératoires sur les limites de fonctions composées.

***Exemples :***

a) Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x)=\ln(1+e^x)$ $\qquad g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$ $\qquad h(x)=\ln\left(\dfrac{3}{x-5}\right)$

b) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to5^+} =\ln\left(\dfrac{3}{x-5}\right)$

## IV - Fonction logarithme décimal

**Définition**

On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction notée $\log$ définie sur $]0;+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

En particulier, $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.

**Propriétés :**

- La fonction $\log$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
- Elle est strictement croissante sur cet intervalle car $\ln 10 > 0$
- La fonction $\log$ possède toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$.
  En particulier, pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs et $p$ entier quelconque :
  $\log(a \times b) = \log a + \log b$ ; $\log\left(a^p\right) = p \log a$ ; $\log\left(10^p\right) = p$

*Exemples : (Transmath p. 153)*

**Des Mathématiques aux Sciences Physiques**

### 36 La fonction logarithme décimal

**A En chimie : pH d'une solution aqueuse**

Pour mesurer l'acidité d'une solution aqueuse, on utilise le **potentiel hydrogène pH** défini par : $\mathbf{pH} = -\mathbf{log}([\mathbf{H^+}])$ où $[H^+]$ est la concentration en ions $H^+$ (en ions-grammes par litre).

**1.** Une solution a pour pH 5. Quelle est la concentration en ions $H^+$ ?

**2.** Une solution est acide quand sa concentration en ions $H^+$ dépasse sa concentration en ions $OH^-$.
Or, dans les conditions normales de température et de pression, $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$.
Démontrez que, dans ces conditions, une solution est acide si et seulement si son pH est inférieur à 7.

**B En acoustique : intensité d'un son**

L'intensité I d'un son (en décibel, dB) est reliée à sa puissance de réception P (en watt par m²) de façon qu'on ait, pour deux sons quelconques 1 et 2, $\mathbf{I_2 - I_1 = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$.

**1.** À quelle variation d'intensité correspond un doublement de la puissance ?

**2.** Que signifie une augmentation de 10 dB en termes de puissance sonore ?

**C En astronomie : magnitude apparente d'une étoile**

Les astronomes de l'Antiquité (Hipparque, Ptolémée) avaient classé les étoiles visibles à l'œil nu selon leur brillance : les plus brillantes étaient dites de première grandeur, celles qui étaient un peu moins brillantes étaient de deuxième grandeur, etc. Le Soleil n'était pas considéré comme une étoile.

Aujourd'hui, on appelle **éclat** d'une étoile la puissance lumineuse par unité de surface qu'on en reçoit sur la Terre (en watt par m²).

Pour faire le lien entre ces deux notions, on appelle **magnitude apparente** d'une étoile d'éclat E le nombre $\boldsymbol{m = -2{,}5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right)}$, où $E_0$ est l'éclat de Véga, choisie comme étoile de référence.

**1.** Quelle est la magnitude apparente de Véga ?

**2.** Démontrez que pour deux étoiles, celle qui a l'éclat le plus grand a la magnitude la plus petite.

**3.** Que signifie, pour une étoile, d'avoir une magnitude apparente négative ?

**4.** L'étoile la plus brillante (après le Soleil) est Sirius, dont l'éclat est 3,9 fois celui de Véga.
Quelle est la magnitude apparente de Sirius ?

**5.** Le Soleil a une magnitude apparente de $-26{,}7$. Calculez le rapport de son éclat à celui de Véga.

**Culture scientifique**

**Le Very Large Telescope (VLT)**

Le VLT de l'ESO *(European Southern Observatory)* est l'observatoire astronomique le plus puissant du monde dans le domaine visible du spectre de la lumière. Il est situé sur le Mont Paranal, au Chili, à 2 600 mètres d'altitude. Sur cette photo prise au crépuscule, on peut voir qu'un faisceau laser rouge est lancé à partir de l'un des quatre télescopes hauts de 8,2 mètres, pour créer une étoile artificielle à une altitude de 90 km dans la mésosphère de la Terre. Ce *Laser Guide Star* fait partie du système qui permet aux astronomes d'éliminer les effets de la turbulence atmosphérique et d'obtenir des images presque aussi nettes que si le télescope était dans l'espace.