GEOMETRIE VECTORIELLE

I Caractérisations vectorielles

1. Vecteurs de l'espace

On étend la notion de vecteur dans le plan à l'espace.
Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc défini par :

- une direction (la droite (AB)) ;
- un sens (de A vers B) ;
- une norme ou distance notée : $||\vec{u}|| = AB$

Théorème : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ABDC parallélogramme}$$

On définit, comme dans le plan des opérations avec les vecteurs.

- L'addition par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
  La construction de la somme de deux vecteurs de même origine s'effectue par un parallélogramme.
- Le produit d'un vecteur par un scalaire : soit un réel λ et le vecteur $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
  - $\vec{v}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$
  - $\vec{v}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$
  - $||\vec{v}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéraire à tout vecteur

Théorème : De la colinéarité, on déduit que :

- les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- lesdroites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$
- une droite (AB) est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \ k \in \mathbb{R}$

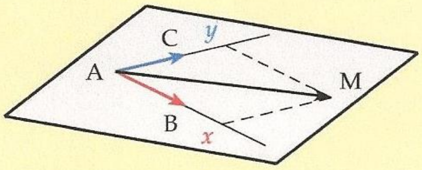
2. Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

Théorème : Un plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires.

Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

$(x;y)$ sont donc les coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du point M dans le plan (ABC)



Remarque : On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) ou forment une base pour le plan (ABC)

Théorème : Si deux plans ont le même couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ alors ces deux plans sont parallèles

3. Vecteurs coplanaires

Définition : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, on peut exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

Théorème : Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$$

II Repérage dans l'espace

Théorème : Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans l'espace est constitué d'un point origine O et de trois vecteurs non coplanaires : $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

- Tout point M de l'espace est alors défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

- Les trois réels uniques (x,y,z) sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. x correspond à l'abscisse, y à l'ordonnée et z à la cote.
- le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit orthonormal si, et seulement si,

$$||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\imath},\ \vec{\jmath} \text{ et } \vec{k} \text{ orthogonaux 2 à 2}$$

Conséquences

Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée.

1. Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$, alors :

– pour tout réel k, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(\boldsymbol{kx\,;ky\,;kz})$;

– le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(\boldsymbol{x+x'\,;y+y'\,;z+z'})$.

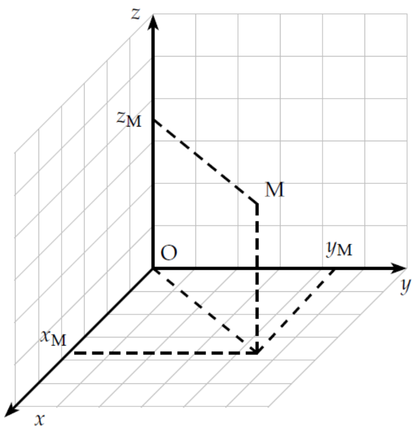
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors :

– le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(\boldsymbol{x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A})$;

– le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

2. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{et} \quad AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$



Exemple : Soient quatre points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$, $D(-3;-5;6)$.

1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exemple : Soient les points A(6 ;8 ;2) ; B(4 ;9 ;1) ; C(5 ;7 ;3) dans un repère orthonormal. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Remarque : Contrairement à la géométrie plane, on ne peut calculer le déterminant pour tester la colinéarité.

Remarque : Pour déterminer a et b, il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation peut alors être incompatible avec les deux autres. Dans ce cas les coefficient a et b n'existent pas. Les points sont alors non coplanaires.

III Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan

1. Droite

Théorème : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramètriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point quelconque $M(x; y; z)$ de Δ), alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A = a\,t \\ y - y_A = b\,t \\ z - z_A = c\,t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$

Exercice

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où A(–1 ; 2 ; –3) et B(1 ; –1 ; 1)

Exercice

Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Exercice

Considérons les droites : (d) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ et (d’) $\begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = s + 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$.

Étudier l’intersection des deux droites (d) et (d’), si elle existe.

2. Plan

Théorème : Soit un plan $\mathscr{P}$ défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et deux vecteurs non colinéraires $\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(\alpha ; \beta ; \gamma)$.

Le plan $\mathscr{P}$ admet donc un système d'équation paramétrique, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$\mathscr{P} \quad \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_{\mathrm{A}} + b\,t + \beta\,s \\ z = z_{\mathrm{A}} + c\,t + \gamma\,s \end{cases} \qquad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice

On considère les points A(2 ; –1 ; –3), B(0 ; 1 ; 4) et C(–3 ; 0 ; 0).

1) Montrer que les 3 points A, B et C définissent un plan.
2) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).