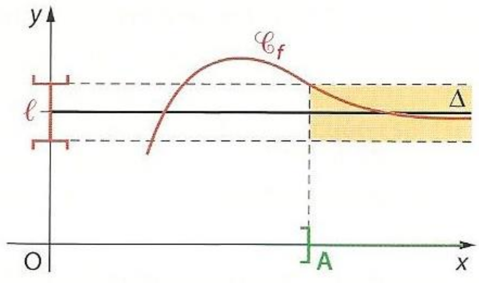
Chapitre II : Limites de fonctions et continuité

I – Limite à l'infini :

1) Limite finie en $+\infty$

Définition :
Dire qu'une fonction *f* a pour limite le réel *l* en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs $f(x)$ pour *x* suffisamment grand (c'est-à-dire pour tous les *x* d'un certain intervalle $]A\ ;\ +\infty[$)

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.



Interprétation graphique :

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant l, et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe C_f *restreinte à l'intervalle* $]A\ ;\ +\infty[$ *soit située dans la partie colorée ci-dessus.*

On dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe C*f* en + ∞ .

Remarque : On définit de façon analogue une limite réelle en $-\infty$.

Limite à l'infini de fonctions de référence :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ de même en $-\infty$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale de la courbe représentative de ces fonctions en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale de la courbe représentative de cette fonction en $+\infty$.

Exemple. *f* est la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Prouvons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, c'est-à-dire que pour tout nombre α strictement positif, $f(x) \in]-\alpha\ ;\alpha[$ dès que *x* est supérieur à un certain nombre A.

Comme $f(x) > 0$, la condition $f(x) \in]-\alpha\ ;\alpha[$ se réduit à $f(x) \in]0\ ;\alpha[$.

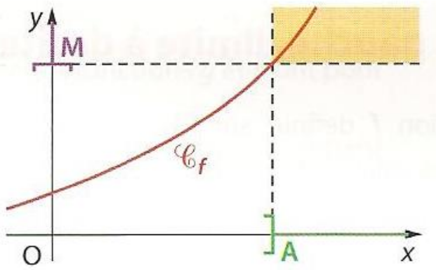
Ceci équivaut à $\frac{1}{x^2} < \alpha$ donc à $x > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Ainsi $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) **Limite infinie en** $+\infty$

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle]A ; $+\infty$ [ )

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



Interprétation graphique :

Quel que soit le nombre M, on peut trouver un nombre A tel que pour tout $x>A$, $f(x)>M$ *: la courbe* C_f *restreinte à l'intervalle]A ;* $+\infty$ *[est dans la partie colorée ci-dessus.*

Limite à l'infini de fonctions de référence :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $(n\in\mathbb{N})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Si n entier pair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ et si n entier impair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

Exemple. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

Prouvons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, c'est-à-dire que pour tout nombre M strictement positif, $f(x)\in\ ]M\,;+\infty[$ dès que x est inférieur à un certain nombre A.

La condition $f(x)>M$ s'écrit $x^2>M$. Ceci équivaut à $x<-\sqrt{M}$ ou $x>\sqrt{M}$.

On peut donc prendre $A=-\sqrt{M}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

II – Limite infinie en un réel a :

Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et le nombre a est une borne de I.

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle ouvert $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proches de a, c'est-à-dire pour tous les nombres de I dans un certain intervalle $]a-\alpha;a[$ ou $]a;a+\alpha[$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Remarque : On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ **.**

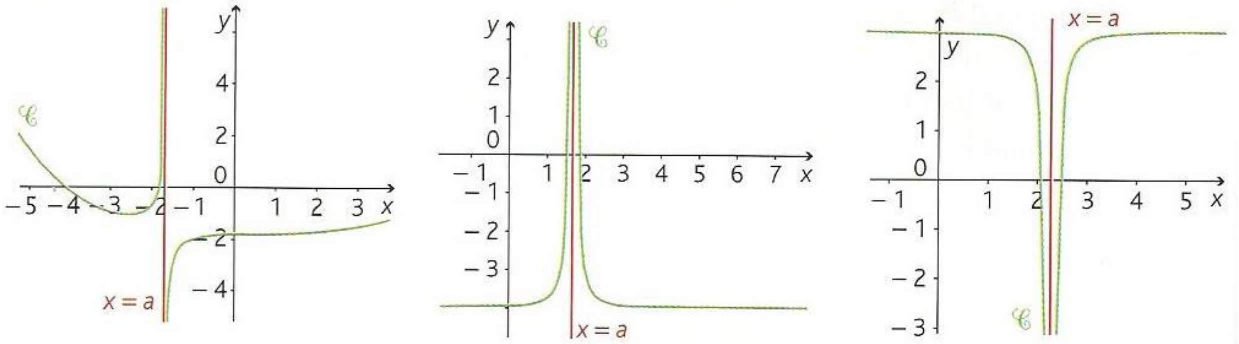
En pratique, on est parfois amené à étudier séparément les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$.

On parle alors de « **limite de *f* à droite en *a*** » notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

et de « **limite de *f* à gauche en *a*** » notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

<u>Interprétation graphique :</u>

La courbe C_f peut être « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $x = a$.



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un réel a (ou à droite en a ou à gauche de a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **<u>asymptote verticale</u>** à la courbe C_f .

<u>Limite de fonctions de référence :</u>

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale de la courbe représentative de ces fonctions.

<u>III – Théorèmes sur les limites :</u>

1) <u>Limites et opérations</u>

Les théorèmes du chapitre 1 sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de 2 suites sont encore valables dans le cas des calculs de limites de fonctions.

- **somme**

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

- **produit**

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	FI

- quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	FI
$l > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	FI

Exemples :

-

Calculer : **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2-x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-2\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2-8x)$ **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2x+3)$

Solution

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2-x) = -\infty$.

b. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\text{, donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-2\right) = -2 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-2\right) = -\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-8x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2-8x) = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2x+3) = -\infty$.

-

f est la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-9}{3-x}$.

1. Calculer la limite de f en 3.

2. Démontrer que $f(x)=-2-\dfrac{3}{3-x}$, puis calculer la limite de f en $+\infty$.

Solution

1. On détermine la limite du numérateur et du dénominateur : $\lim\limits_{x\to 3}(2x-9)=-3$ et $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)=0$.

La limite du quotient sera donc infinie.

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$, on doit étudier le signe de $3-x$ selon les valeurs de x.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3}(2x-9)=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}}(3-x)=0 \text{ et pour } x>3,\ 3-x<0\end{array}\right\}\text{ donc par règle pour le quotient } \lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}}f(x)=+\infty.$$

2. Pour tout réel x appartenant à $]3\,;+\infty[$, $-2-\dfrac{3}{3-x}=\dfrac{-2(3-x)-3}{3-x}=\dfrac{2x-9}{3-x}$.

Comme $f(x)=\dfrac{2x-9}{3-x}$, on a bien $f(x)=-2-\dfrac{3}{3-x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}3=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{3-x}=0 \text{ et donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{3}{3-x}\right)=-2.$$

- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2-4$

FI mais $x^3+2x^2-4=x^3\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}=1$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2-4=-\infty$

A retenir :

De façon plus générale, la limite d'une **fonction polynôme en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

$$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2-4=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\right)$$

- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-9}{3x-1}$

FI donc

On modifie alors l'expression de $f(x)$ en factorisant le numérateur par son terme de plus degré, ainsi que le dénominateur, puis en simplifiant par x :

$$f(x)=\frac{2x-9}{3x-1}=\frac{2x\left(1-\frac{9}{2x}\right)}{3x\left(1-\frac{1}{3x}\right)}=\frac{2\left(1-\frac{9}{2x}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3x}\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{9}{2x}\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}2=2, \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\left(1-\frac{9}{2x}\right)\right]=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}3=3, \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\left(1-\frac{1}{3x}\right)\right]=3\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{2}{3}.$$

A retenir :

De façon plus générale, la limite d'une **fonction rationnnelle en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-9}{3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Remarque : Pour déterminer une limite

- On commence par conjecturer la limite cherchée (tableur, courbe,…)
- On utilise les opérations sur les limites
- Si on a une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ », on met en facteur le terme dominant.
- Si on a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », on factorise au numérateur et au dénominateur les termes dominants, puis on simplifie.

2) Limite d'une fonction composée

Définition : Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I à valeurs dans J et g définie sur J.
On appelle **fonction composée de *f* suivie de g**, notée go*f*, la fonction qui, à tout réel *x* de I, associe $g(f(x))$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

Exemple : soit les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^4-5x+1$ et $g(x)=x^2$

Alors, pour tout réel *x*, $gof(x)=g(f(x))=g(3x^4-5x+1)=(3x^4-5x+1)^2$

Théorème (ADMIS) : *a*, *b* et *c* représentent 3 réels ou éventuellement + ∞ ou – ∞, et *f* et *g* sont des fonctions.
Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim_{x\to a}(gof)(x)=c$

Exemple : Déterminer la limite $x \mapsto \sqrt{\frac{4x}{x-2}}$ en $+\infty$

3) Limites et comparaison

On dispose des théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites

Théorème

f et *g* sont deux fonctions définies sur un intervalle I = $]a;+\infty[$ (ou I = $\mathbb{R}$) telles que pour tout réel de I , $f(x)\geq g(x)$:

si $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ **alors** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (Théorème de minoration)

si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ **alors** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (Théorème de majoration)

Remarque : ce théorème s'adapte aux comparaisons en $-\infty$

Démo (à titre indicatif)

Démontrons ce résultat au voisinage de + ∞.

On suppose que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $f(x)\geq g(x)$ pour x suffisamment grand.

Soit B un réel positif fixé.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ soit d'après la définition des limites il existe un réel A tel que pour tout $x\in]A;+\infty[$ implique que $g(x)>B$

Donc pour tout réel $x>A$ on a $\begin{cases} g(x)>B \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ soit $f(x)>B$

Ceci étant prouvé pour tout réel B positif et fixé, on en déduit, d'après la définition, que :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Exemple. Intéressons-nous au comportement en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+(\cos x)^2$. Pour tout x, $(\cos x)^2\geqslant 0$, donc $f(x)\geqslant x$.

Or $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc d'après le théorème 2, $\lim_{x\to+\infty}[x+(\cos x)^2]=+\infty$.

Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

f, g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle I = $]a;+\infty[$ (ou I = $\mathbb{R}$) et l est un réel.

Si, pour tout réel x de I , $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et **si** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=l$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)=l$,

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

Remarque : ce théorème s'adapte à l'encadrement en $-\infty$

Exemple. Intéressons-nous au comportement en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$. Pour tout x de I, $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$, d'où $-\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc d'après le théorème 1, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$.

IV – Rappel sur la dérivation :

Nombre dérivé, fonction dérivée :

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I. Les nombres α et $(\alpha+h)$ appartiennent à I.

Dire que f est dérivable en α signifie que le taux d'accroissement $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.

Ce nombre L est appelé **nombre dérivé de f en α**. Il est noté $f'(\alpha)$.

$$f'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\text{L}.$$

Définition f est une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout nombre x de I.
Alors la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f. On la note f'.

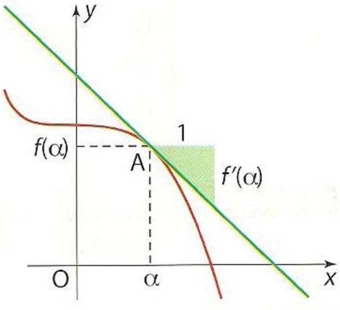
Tangente à la courbe d'une fonction :

Définition f est une fonction définie sur un intervalle I. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative. α est un nombre de l'intervalle I. f est dérivable en α.
La droite qui passe par $A(\alpha\,;f(\alpha))$ et de coefficient directeur $f'(\alpha)$ est **la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.**

Équation de la tangente à une courbe en un point

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(\alpha\,;f(\alpha))$ est :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$



Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Dérivée et extremum local :

Théorème :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

Dérivées usuelles et opérations

Fonction f	Fonction dérivée f'	f est dérivable sur l'intervalle
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ \ n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Théorème :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel , alors les fonctions λu , $u + v$ et uv sont dérivables sur I et : $(\lambda u)' = \lambda u'$ $(u+v)' = u' + v'$ $(uv)' = u'v + uv'$

Si pour tout réel a de I , $v(a) \neq 0$

les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

V – Compléments sur la dérivation :

1. Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Théorème (admis)

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$.

Alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Démonstration :(principe)

Soit $a \in \mathrm{I}$; le taux d'accroissement de g en t est :
$\tau(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée : $\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}$, on a :

$$\tau(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}.$$

On obtient $\lim_{h \to 0} \tau(h) = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$; d'où le résultat.

Exemples :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$.

  On a dans ce cas $u(x) = 5x^2 + 1$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

  Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+1}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}$

- Soit la fonction g définie sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ par $g(x) = \sqrt{-3x+2}$.

  On a dans ce cas $u(x) = -3x + 2$ et $u(x) > 0$ sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$

  Donc g est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ et $g'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x+2}}$

2. Dérivée de la fonction $x \mapsto [u(x)]^n$

Théorème

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel.

1. Si $n \geq 2$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$

2. Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$

et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ (En particulier, on a : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$)

Démonstration :

1. Démontrons, par récurrence, que la proposition « u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ » est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

- Pour $n = 2$, la fonction u^2 est le produit $u \times u$ donc u^2 est dérivable ; sa dérivée est $(u^2)' = uu' + u'u$. Ainsi $(u^2)' = 2u'u$. La proposition est vraie au rang 2.

- Supposons la proposition vraie au rang $n \geqslant 2$: « u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ». Alors la fonction u^{n+1} est le produit de deux fonctions dérivables sur I : u^n et u ; elle est donc dérivable sur I.
Sa dérivée est $(u^n \times u)' = (u^n)' \times u + u^n \times u' = nu'u^{n-1} \times u + u^n \times u'$, d'où $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n$.
La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- La proposition est vraie au rang 2 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, u^n est dérivable sur I, donc $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. Sa dérivée est :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{0 \times u^n - 1 \times nu'u^{n-1}}{(u^n)^2} = \frac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = -n\frac{u'}{u^{2n-(n-1)}}, \text{ soit } \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}.$$

Exemples :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2+3\right)^5$.

  On a dans ce cas $f = u^5$ avec $u(x) = x^2+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

  Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5 \times 2x \times \left(x^2+3\right)^4 = 10x\left(x^2+3\right)^4$

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{5}{\left(x^2+3\right)^4}$.

  On a dans ce cas $g = 5 \times \dfrac{1}{u^4}$ avec $u(x) = x^2+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) \neq 0$

  Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 5 \times \left(-4 \times \dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^5}\right) = -\dfrac{40x}{\left(x^2+3\right)^5}$

- Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ par $h(x) = \dfrac{1}{3x-5}$.

  On a dans ce cas $h = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 3x-5$ dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ et $u(x) \neq 0$

  Donc h est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ et $h'(x) = -\dfrac{3}{(3x-5)^2}$

VI – Continuité :

1) Continuité sur un intervalle

Définitions :

f est une fonction définie sur un intervalle I et *a* est un réel de I

- On dit que la fonction *f* est **continue en *a*** lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$
- On dit que la fonction est **continue sur un intervalle** lorsqu'elle st continue en tout réel *a* de cet intervalle

Graphiquement, la continuité d'une fonction *f* sur un intervalle I se traduit par le fait que sa courbe représentative peut être tracée **sans lever le crayon**.

Exemples :

Les fonctions usuelles (affine, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue, cosinus et sinus) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou compositions sont continues sur tout intervalle où elles sont définies (en particulier les fonctions polynômes continues sur $\mathbb{R}$ et rationnelles où elles sont définies)

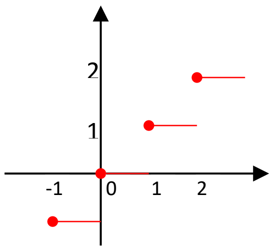
Exercice :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Pour quelle valeur de *k*, la fonction *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exemples de fonctions non continues :

- La fonction partie entière :
  Pour tout réel *x*, il existe un unique entier *n* tel que $n \leq x < n+1$.
  On appelle **fonction partie entière** la fonction notée E qui au réel *x* de l'intervalle $[n; n+1[$ associe l'entier n ; on note $E(x) = n$



•E(4) = 4 •E(6, 2) = 6

•E(– 2) = – 2 •E(– 4, 3) = – 5

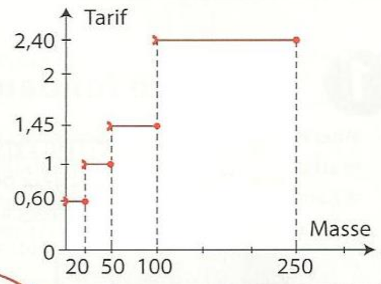
La fonction partie entière n'est pas continue en 1 mais est continue sur $[0;1[$.

- **Étudier un exemple concret de fonction non continue**

Le graphique ci-contre représente les tarifs postaux applicables en France métropolitaine en juillet 2011. On note x la masse d'une lettre, en grammes, et $f(x)$ le tarif d'envoi, en euros, de ce courrier.

a) Étudier graphiquement la continuité de cette fonction *f*.

b) Donner l'expression de $f(x)$ selon les intervalles auxquels x appartient.



Solution

a) La fonction *f* est définie sur l'intervalle]0 ; 250].
Cette fonction n'est pas continue (ou est discontinue) en 20, en 50 et en 100.

Pour tracer la courbe rouge, on lève le crayon aux points d'abscisses 20, 50 et 100.

b) $f(x) = \begin{cases} 0{,}60 & \text{si } x \in]0\,;20] \\ 1 & \text{si } x \in]20\,;50] \\ 1{,}45 & \text{si } x \in]50\,;100] \\ 2{,}40 & \text{si } x \in]100\,;250] \end{cases}$

Remarque : On dit que *f* est définie par morceaux. Comme sur chaque « morceau », elle est constante, on dit que *f* est une fonction en escalier.

2) Continuité et dérivabilité

Propriété : *f* est une fonction définie sur un intervalle I et *a* est un réel de I.
Si *f* est dérivable en a, alors cette fonction est continue en a.
Si *f* est dérivable sur I, alors cette fonction est continue sur I.

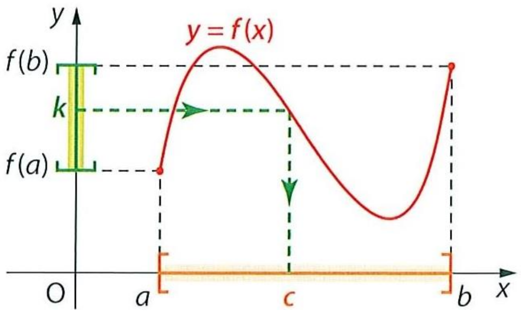
Remarques :

- Cette propriété nous donne un moyen pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I : il suffit en effet de démontrer que cette fonction est dérivable sur I.
- **La réciproque est fausse**. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

VI – Résolution d'équations :

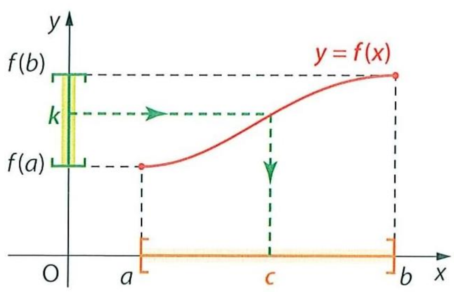
1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (ADMIS)
Si la fonction *f* est définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ et *k* un réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$,
alors il existe au moins un réel *c* compris entre a et b tel que $f(c)=k$



2) Théorème de bijection

Théorème de bijection
Si la fonction *f* est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a;b]$,
alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ a une **solution unique** dans $[a;b]$.



Démo :

- Existence : Théorème des valeurs intermédiaires
- Unicité : Démontrons ceci à l'aide d'un **raisonnement par l'absurde**

On suppose qu'il y a 2 réels distincts *c* et c*'* ($c < c'$) tel que $f(c)=f(c')=k$ or il y a une contradiction avec le fait que *f* soit strictement monotone, donc la solution est unique.

Convention

Dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Remarques :

- Ce théorème s'applique aux intervalles $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $]-\infty;b]$, $]-\infty;b[$ ou encore $\mathbb{R}$, il convient alors d'étudier la limite de *f* aux bornes de l'intervalle de départ.

- Si on doit résoudre l'équation $f(x)=0$, on montre que *f* est monotone sur $[a;b]$ et que $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique.

Exercice :

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+4x^2+4x$.

a) Dresser le tableau de variations de *f*.
b) Démontrer que l'équation $f(x)=-1$ admet exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.
c) Avec la calculatrice, donner la valeur exacte ou l'arrondi au centième de chaque solution. *(–2,62 ;-1 ;-0 ;38)*