Chapitre IV : Fonction exponentielle

I – La fonction exponentielle

1. Un résultat préliminaire :

Théorème
a et b sont deux réels avec $a \neq 0$
Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = af'(ax+b)$

Démonstration (facultatif) :

Pour tout nombre $h \neq 0$, notons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de g entre x et $x+h$:

$$\tau(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(a(x+h)+b) - f(ax+b)}{h}.$$

Le nombre a étant non nul, $\tau(h) = a \times \dfrac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah}$.

Posons $ax + b = \mathrm{X}$ et $ah = \mathrm{H}$; alors $\tau(h) = a \times \dfrac{f(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{X})}{\mathrm{H}}$.

Or : $\lim\limits_{h \to 0} \mathrm{H} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{H} \to 0} \dfrac{f(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{X})}{\mathrm{H}} = f'(\mathrm{X})$.

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (chapitre 2, théorème 3, p. 58) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah} = f'(ax+b).$$

Il en résulte $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = a \times f'(ax+b)$. Ainsi, g est dérivable en x.

Ce résultat étant vrai pour tout nombre x, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = af'(ax+b)$.

2. La fonction exponentielle

Théorème et définition
Il existe une et une seule solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et on la note **exp**.

Démonstration : ***(exigible)***

- ***Existence (ADMIS)***

- ***Unicité***

- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

  Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = f(x)f(-x)$

  f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, alors φ l'est aussi et on a pour tout réel x

  $\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[-f'(-x)]$

  $\varphi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x)$

  $\varphi'(x) = 0$

  Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(0) = 1$ et, par conséquent, pour tout réel x,

  $\varphi(x) = 1 = f(x)f(-x)$ et donc $f(x) \neq 0$

• Raisonnons par l'absurde

Soit g une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'(x)=g(x)$ et $g(0)=1$.

On a vu précédemment que $f(x)\neq 0$ (également $g(x)\neq 0$) alors la fonction $\left(\frac{g}{f}\right)$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=0$

La fonction quotient $\left(\frac{g}{f}\right)$ est alors constante sur $\mathbb{R}$

Or $\left(\frac{g}{f}\right)(0)=1$ donc $f=g$. Et, par conséquent, f est unique.

3. Conséquences (1ères propriétés)

Propriétés :

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même, $\exp'(x)=\exp(x)$.
2. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et, de plus, $\exp(0)=1$.
3. Pour tout réel x, $\exp(x)\neq 0$ et $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$.

Théorème

a et b sont deux réels avec $a\neq 0$

La fonction f définie par $f(x)=\exp(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x $f'(x)=a\exp(ax+b)$

Cela résulte du résultat préliminaire.

Exemple. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\exp(-3x+1)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x, $h'(x)=-3\exp(-3x+1)$.

II – Propriétés de la fonction exponentielle

1. Propriétés algébriques

Propriété : pour tous réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

Démonstration :

Soit b un nombre quelconque. Le nombre $\exp(b)$ est non nul.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$.

La fonction $x\longmapsto\exp(x+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x\longmapsto 1\times\exp'(x+b)$ (voir § 1).

Donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x, $g'(x)=\frac{\exp'(x+b)}{\exp(b)}=\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}=g(x)$.

De plus, $g(0)=\frac{\exp(b)}{\exp(b)}=1$.

La fonction g est donc telle que $g'=g$ et $g(0)=1$: c'est la fonction exponentielle.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp(x)=\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$, d'où $\exp(x+b)=\exp(x)\times\exp(b)$.

Pour $x=a$, on obtient $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

Remarque : La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Propriété : pour tous réels a et b, $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Démonstration :

$\exp(a-b)=\exp\big(a+(-b)\big)=\exp(a)\times\exp(-b)$

Or, pour tout réel x, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ donc $\exp(a-b)=\exp(a)\times\dfrac{1}{\exp(b)}=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Propriété : pour tout réel x et n entier relatif, $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.

Démonstration :

- Démontrons par récurrence l'égalité dans le cas où ***n* est un entier naturel.**

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$, avec $n\in\mathbb{N}$.

– Initialisation

Pour $n=0$, pour tout nombre x, $\exp(0x)=\exp(0)=1=[\exp(x)]^0$, car $\exp(x)\neq 0$.

La proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

– Hérédité

Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.

Examinons la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le théorème 4 : $\exp[(n+1)x]=\exp(nx+x)=\exp(nx)\times\exp(x)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$;

donc $\exp[(n+1)x]=[\exp(x)]^n\times\exp(x)$, soit $\exp[(n+1)x]=[\exp(x)]^{n+1}$.

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

– Conclusion

Comme la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et héréditaire, on conclut que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Démontrons maintenant l'égalité dans le cas où ***n* est un entier négatif.**

Soit n un entier négatif, alors $n=-m$ avec m entier naturel.

Pour tout nombre x, $\exp(nx)=\exp(-mx)\underset{\text{Conséquence, déf.1}}{=}\dfrac{1}{\exp(mx)}\underset{\text{Car } m\in\mathbb{N}}{=}\dfrac{1}{[\exp(x)]^m}=[\exp(x)]^{-m}=[\exp(x)]^n$.

- Conclusion : On a donc prouvé que l'égalité est vraie pour tout entier relatif n.

2. Nouvelle notation

L'image de 1 par la fonction exp est notée ***e*** soit $\exp(1)=e$.

Or, pour tout entier relatif n $\exp(n)=(\exp 1)^n=e^n$

On étend cette égalité à tout réel x, $\boxed{\exp(x)=e^x}$ (**nouvelle notation**)

On lit « exponentielle de x » ou « e exposant x »

A la calculatrice, on trouve $e\approx 2,718$.

On réécrit les propriétés :

Propriétés

- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même $\left(e^x\right)' = e^x$.
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{na} = \left(e^a\right)^n$ (n entier relatif)

Exemples :

- **Simplifier des expressions**

a désigne un nombre réel.
Dans chaque cas, écrire l'expression avec l'exponentielle d'un seul nombre.

a) $e^{2a} \times (e^{-a})^3$ **b)** $\dfrac{e^{2a+1}}{e^{2-a}}$ **c)** $\dfrac{e \times e^{2a}}{e^{a+1}}$

Solution

a) $(e^{-a})^3 = e^{-3a}$

Donc $e^{2a} \times (e^{-a})^3 = e^{2a} \times e^{-3a} = e^{2a-3a} = e^{-a}$.

b) $\dfrac{e^{2a+1}}{e^{2-a}} = e^{2a+1-(2-a)}$

Donc $\dfrac{e^{2a+1}}{e^{2-a}} = e^{2a+1-2+a} = e^{3a-1}$.

c) $e \times e^{2a} = e^1 \times e^{2a} = e^{1+2a}$

Donc $\dfrac{e \times e^{2a}}{e^{a+1}} = \dfrac{e^{1+2a}}{e^{a+1}} = e^{1+2a-(a+1)} = e^a$.

$(e^x)^n = e^{nx}$

$e^x \times e^y = e^{x+y}$

$\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ avec $x = 2a+1$ et $y = 2-a$.

Penser à écrire :
$e = e^1$

- **Transformer des expressions**

Démontrer que pour tout nombre réel x, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Solution

Pour tout nombre réel x,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \dfrac{1}{e^x}}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \frac{\dfrac{(e^x)^2 - 1}{e^x}}{\dfrac{(e^x)^2+1}{e^x}}$$

Donc $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

$e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$ et cette expression est définie sur $\mathbb{R}$.

On utilise :
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $(e^x)^2 = e^{2x}$

III – Etude de la fonction exponentielle

1. Sens de variation

Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

Démonstration :

En effet, $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, $e^x = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ d'où $\exp(x) > 0$.

On sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété : La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:

On sait que $\exp'(x) = \exp(x)$ or $\exp(x) > 0$ donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$ et $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

2. Limites

Propriété : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration : ***(exigible)***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

- f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = e^x - 1$.

Sur $]-\infty;0]$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante et sur $[0,+\infty[$, f est croissante.

De plus, $f(0) = 1$, donc f admet en 0 un minimum égal à 1.

Par suite $f(x) \geq 1$, donc $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, d'où $e^x > x$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- Pour déterminer l'autre limite, on pose $X = -x$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ car } \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

Bilan et courbe représentative :

On obtient le tableau de variation de la fonction exponentielle

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $C_{\exp}$ représentant la fonction exp en $-\infty$.

Tangente (T_0) à $C_{\exp}$ au point $A(0;1)$

$(T_0): y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 0$; $f'(a) = f'(0) = 1$ et $f(a) = f(0) = 1$

Donc $\boxed{(T_0): y = x + 1}$

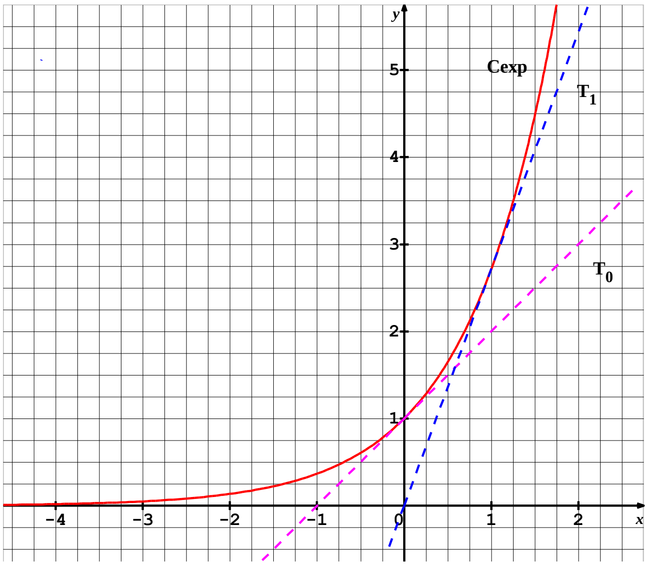
Tangente (T_1) à $C_{\exp}$ au point $B(1;e)$

$(T_1): y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a = 1$; $f'(a) = f'(1) = e$ et $f(a) = f(0) = e$

Donc

$$(T_1): y = e(x-1)+e$$

$$\boxed{(T_1): y = ex}$$



3. Autres limites (Croissances comparées)

Propriété : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

Démonstration :

- La fonction exp est dérivable en 0.

Le nombre dérivé en 0 est 1 ; on obtient donc, par définition, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-e^0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x)=e^x-x$ et on sait que $e^x > x$ (Cf III) 2))
donc $f'(x)>0$ et, par suite, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $f(0)=1$. On en déduit que, pour x > 0, $f(x)>f(0)$, soit $f(x)>1>0$; autrement dit, $e^x>\dfrac{x^2}{2}$

Comme $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

- On pose $X=-x$, alors xe^x s'écrit $-\dfrac{X}{e^X}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{X}{e^X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{-1}{\dfrac{e^X}{X}}=0$

Exercice :

Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x+1\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x$

4. Equation – inéquation

Propriété :

Pour tout réel strictement positif *m*, l'équation $e^X = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$, notée $\ln m$.

Démonstration :

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus strictement croissante. Les limites déterminées précédemment montrent que la fonction exp établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

Donc pour tout réel *m* strictement positif, l'équation $e^X = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution et exemples :

Il faut transformer l'équation ou l'inéquation pour se ramener à une égalité du type $e^a = e^b$ ou $e^a < e^b$. Sinon il est parfois astucieux d'effectuer un changement de variable.

Exemple 1

Résoudre $e^{x^2-2} = e^2$

Ceci équivaut à
$x^2 - 2 = 2$
$\Leftrightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Donc $S = \{-2;2\}$

Exemple 2

Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

On pose $X = e^x$ et $X > 0$, $e^{2x} = X^2$
Ceci équivaut à résoudre
$X^2 - 3X + 2 = 0$
Après avoir calculé le discriminant, on trouve 2 solutions 2 et 1
Or $X > 0$ donc on conserve les 2 possibilités
Soit $e^x = 1 = e^0$ soit $x = 0$
Et $e^x = 2$ soit $x = \ln 2$
Ainsi $S = \{0;\ln 2\}$

Exemple 3

Résoudre $e^{x^2-1} \geq 1$

Ceci équivaut à $e^{x^2-1} \geq e^0$
Or la fonction exp est croissante donc l'inéquation équivaut à
$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$

Ainsi $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

IV – Fonction de la forme e^u

1. Dérivée

Théorème (admis)

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3-5x+2}$.

On a dans ce cas $f = e^u$ avec $u(x) = x^3 - 5x + 2$ dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (3x^2 - 5) \times e^{x^3-5x+2}$

2. Limites

Théorème (ADMIS) :

a et b représentent 2 réels ou éventuellement + ∞ ou – ∞, et u est une fonction.

- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = 0$
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = e^{b}$
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = +\infty$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{4x}{x-2}}$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^+} e^{\frac{x-5}{x-2}}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x^2-3x+5}$

3. Exemples-type

La modélisation de nombreux problèmes en probabilité, en statistique ou en biologie amène à l'étude de fonctions de la forme $x \mapsto e^{-kx}$ ou $x \mapsto e^{-kx^2}$ avec k **constante positive**.

$\boxed{\text{Fonction } f_k : x \mapsto e^{-kx}}$

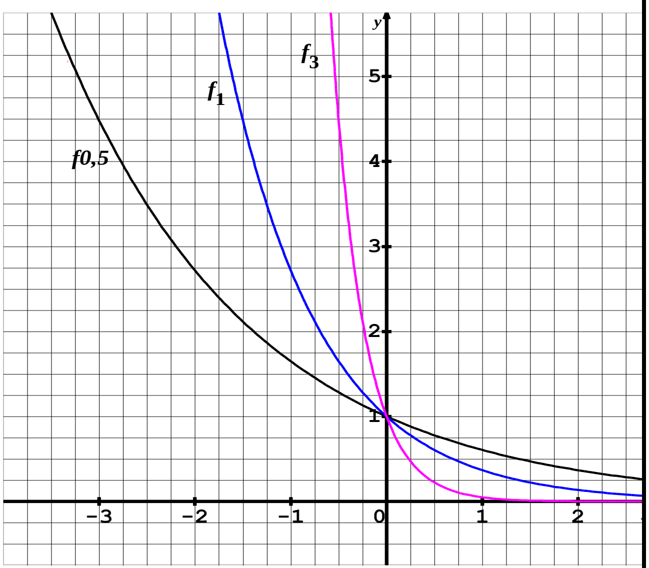
Ces fonctions sont positives.

De plus, $f_k'(x) = -ke^{kx}$.

Sachant que $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$, on en déduit que $f_k'(x) < 0$.

Les fonctions f_k sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}$.

On démontre que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx} = +\infty$



Toutes les courbes passent par le point de coordonnées (0 ; 1)

$\boxed{\text{Fonction } g_k : x \mapsto e^{-kx^2}}$

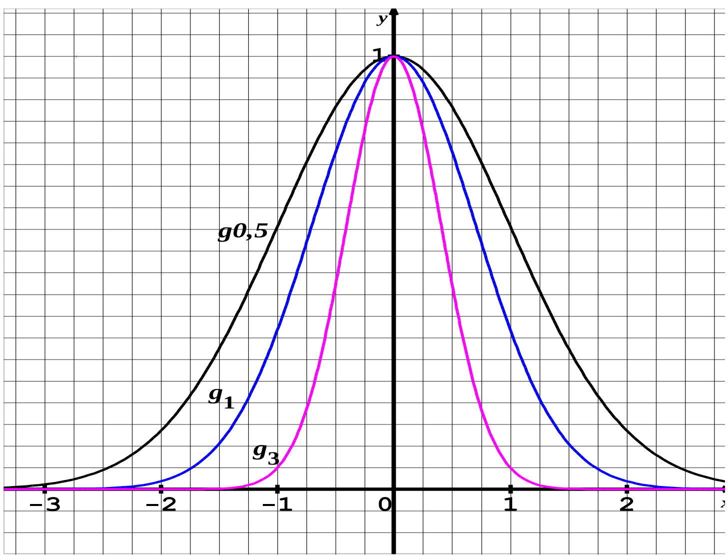
Ces fonctions sont positives et paires.

De plus, $g_k'(x) = -2kxe^{kx^2}$.

La dérivée a le signe de $-x$.

Les fonctions g_k sont croissantes sur $]-\infty; 0]$ et décroissantes sur $[0; +\infty[$. Elles admettent 1 comme maximum atteint en 0.

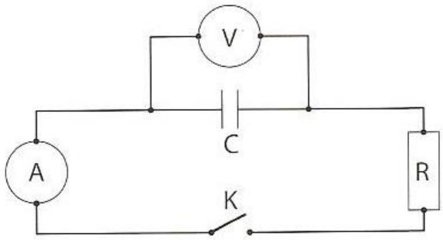
$-kx^2 < 0$ sur $\mathbb{R}$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx^2} = 0$



Toutes les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice

En Sciences physiques : décharge d'un condensateur



Un condensateur de capacité C a été chargé et la tension entre ses bornes est $E = 10$ V.
À l'instant $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K du circuit de résistance R. L'ampèremètre A indique le passage d'un courant dont l'intensité diminue progressivement tout comme la tension aux bornes du condensateur. La tension U_c aux bornes du condensateur est donnée, en volt, par :

$$U_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}},$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit ; elle se mesure en seconde.

On donne $C = 10^{-5} F$ et $R = 140\,000\ \Omega$.

1 Donner l'expression de $U_c(t)$ en fonction de t.

2 Démontrer que U_c est une fonction décroissante du temps. Dresser son tableau de variations.

3 Tracer la représentation graphique Γ de la fonction U_c. On prendra en abscisse 2 cm pour 1 s, en ordonnée, 1 cm pour 1 V.

4 **a.** Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à Γ en 0. Tracer (T).

b. Montrer que cette tangente coupe l'axe des abscisses à l'instant $t = \tau$.

5 Lire sur le graphique la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t = \tau$.
Démontrer qu'à cet instant, la tension aux bornes du condensateur a diminué d'environ 67 %.

Pour info Le condensateur est un composant fondamental des circuits électriques. Son rôle est de stocker des charges électriques. Il emmagasine de l'énergie au cours de sa charge, puis il la restitue lors de la décharge.
La quantité d'énergie électrique emmagasinée dépend de la capacité du condensateur, noté C.
On le trouve notamment dans les appareils comprenant un flash. Il libère son énergie dans une lampe qui émet alors une lumière intense. Dans ce cas, la décharge est très rapide.