DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I Rappels

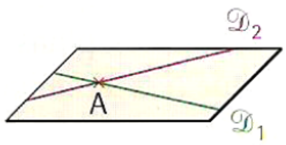
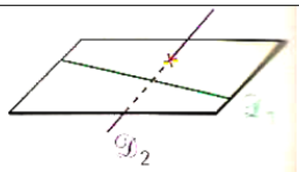
Règles d'incidence

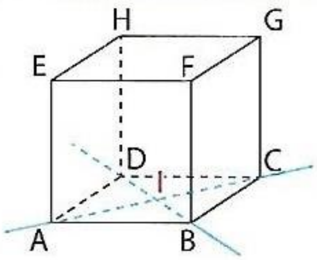
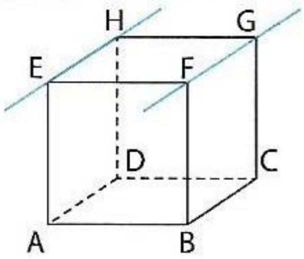
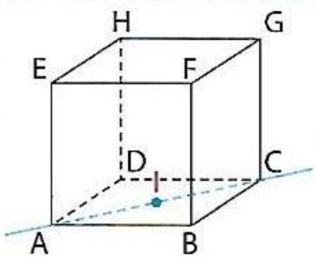
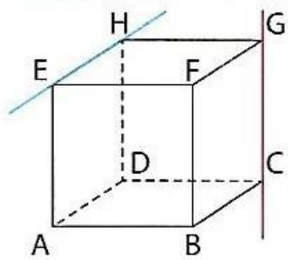
- Par **deux points distincts** A et B de l'espace, passe une **unique droite**, notée (AB).
- Par **trois points non alignés** A, B et C, passe un **unique plan**, noté (ABC).
- Si un plan contient deux points distincts A et B, il contient toute la droite (AB).
- Tous les résultats de **géométrie plane** s'appliquent dans **chaque plan de l'espace**.

II Positions relatives de droites et plans

1) Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (parallèles ou sécantes), soit **non coplanaires**.

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$			
Coplanaires			Non coplanaires
sécantes	strictement parallèles	confondues	
 un point commun unique	 pas de point commun	 tous les points sont communs	 il n'existe pas de plan contenant les deux droites

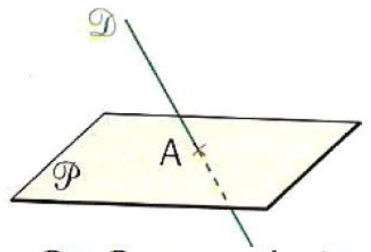
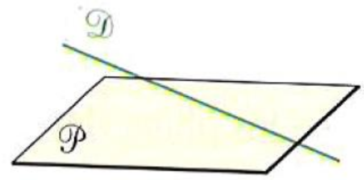
Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

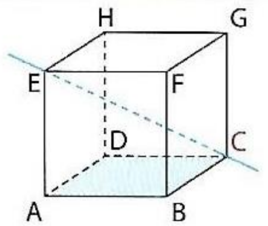
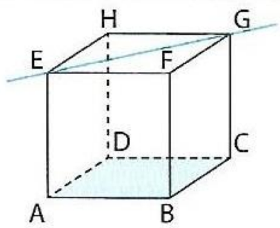
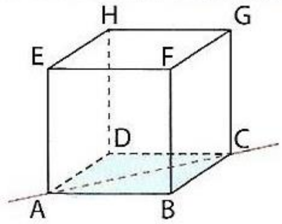
Remarque :

Attention, dans l'espace, il existe des droites qui ne sont ni parallèles ni sécantes.

2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

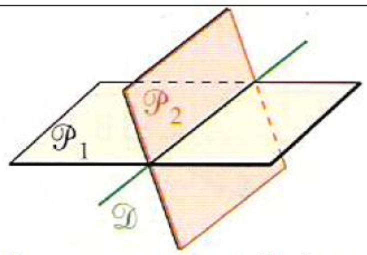
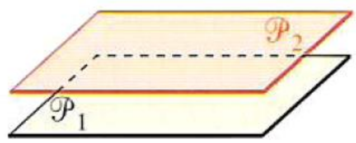
Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants en un point**, soit **parallèles**.

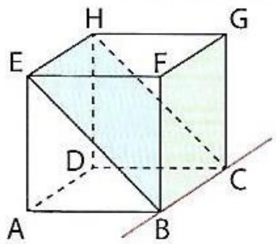
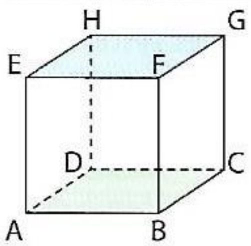
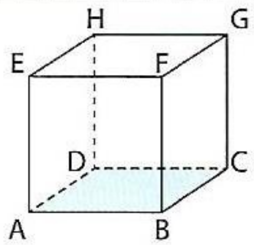
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	parallèles	
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	 $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	 La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	 La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

3) Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit **sécants suivant une droite**, soit **parallèles**.

Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	parallèles	
	confondus	strictement parallèles ou disjoints
 leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	 leur intersection est un plan	 leur intersection est vide

Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	 Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	 Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

III Parallélisme dans l'espace

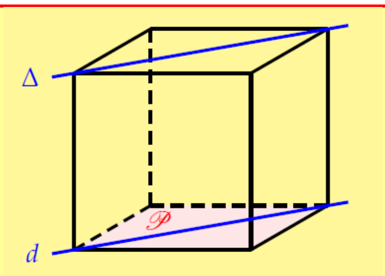
Théorème 1 : Par un point de l'espace, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée et un et un seul plan parallèle à un plan donné.

Théorème 2 :

- Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont parallèles entre eux.

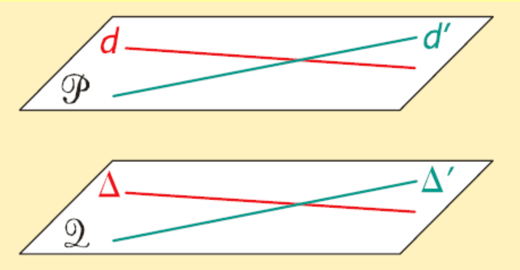
Théorème 3 :
Une droite Δ est parallèle à un plan P si et seulement si elle est parallèle à une droite *d* de ce plan.

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel \Delta \\ d \subset P \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \parallel P$$



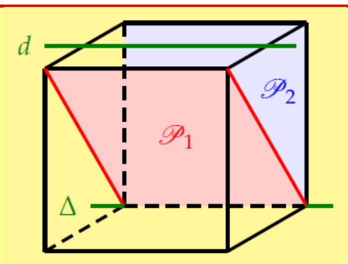
Théorème 4 :
Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

$$\left.\begin{array}{l} d \subset P \text{ et } d' \subset P \\ \Delta \subset Q \text{ et } \Delta' \subset Q \\ d // \Delta \text{ et } d' // \Delta' \end{array}\right\} \Rightarrow P // Q$$

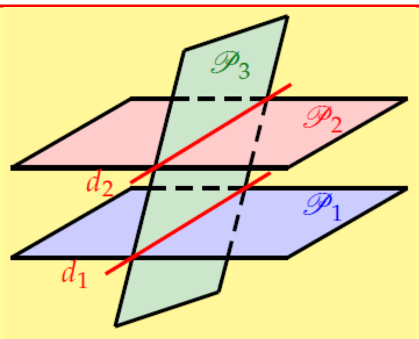


Théorème 5 :
Si une droite d est parallèle à deux plans P_1 et P_2 sécants en une droite Δ alors d et Δ sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} d // P_1 \;\text{ et }\; d // P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // d$$

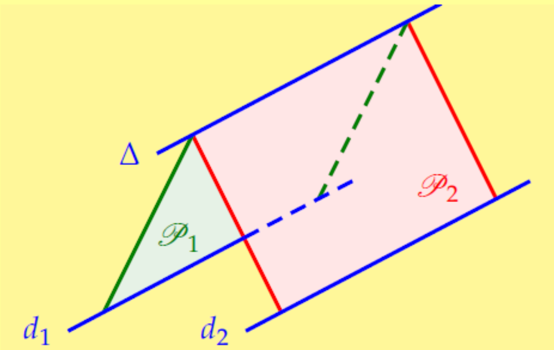


Théorème 6 :
Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.



Théorème 7 : Théorème du toit
Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2 .
Si ces deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ ,
alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \subset P_1 \text{ et } d_2 \subset P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // d_1 \text{ et } \Delta // d_2$$

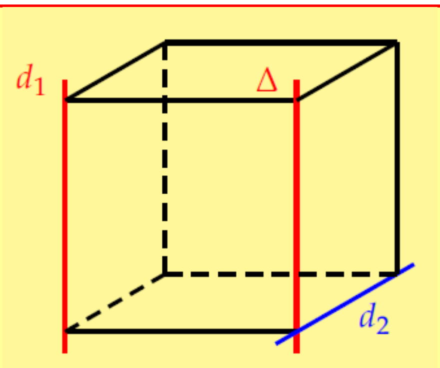


IV Orthogonalité dans l'espace

1) Droites orthogonales

Définitions :

- Deux droites sont **perpendiculaires** lorsqu'elles sont **sécantes ET perpendiculaires** dans le plan qu'elles déterminent. (ex : d_2 et Δ)
- Deux droites sont **orthogonales** lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque d'un plan sont perpendiculaires. (ex : d_1 et d_2)



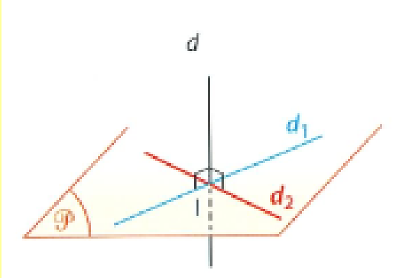
Remarque :

Dans l'espace, on fait une différence pour des droites entre les mots « orthogonales » et « perpendiculaires ».

Théorème 8: si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

2) Droite orthogonale à un plan

Théorème 9 :
Une **droite est orthogonale à un plan** si, et seulement si, elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.



Théorème 10 : si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Théorème 11 :

Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

Théorème 12 :

Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un des plans est orthogonale à l'autre.

Théorème 13:

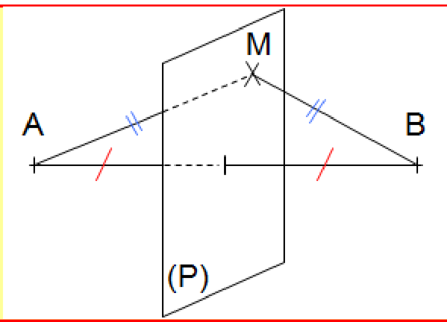
Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Théorème 14 :

Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Définition : plan médiateur

Le **plan médiateur** d'un segment [AB] est le plan orthogonal à (AB) qui passe par le milieu de [AB].



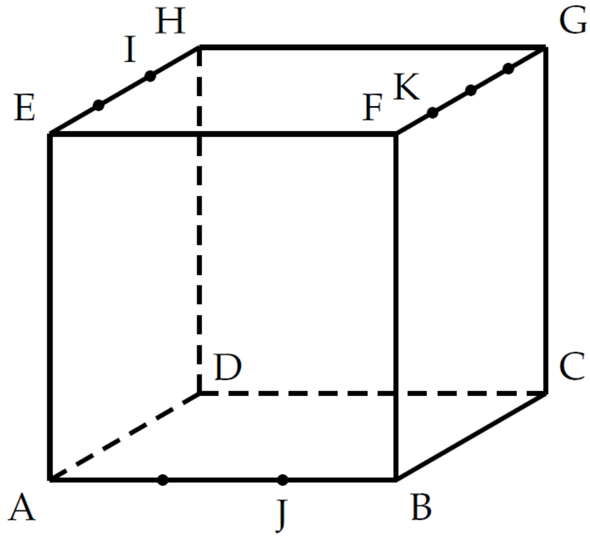
Théorème :
Le plan médiateur d'un segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points A et B.

V Application : section d'un cube et d'un tétraèdre par un plan

1) Section d'un cube par un plan

Soit un cube ABCDEFGH et un plan (IJK).

Il s'agit de déterminer l'intersection, lorsque cela est possible, d'un plan avec chaque face du cube.



- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant la face du cube
- Si deux points M et N du plan (IJK) sont sur une face, on relie M et N, cela donne l'intersection de (IJK) et de cette face
- La section du cube par le plan (IJK) est un polygone.

2) Section d'un tétraèdre par un plan

Soit un tétraèdre ABCD et un plan (EFG).

Il s'agit de déterminer l'intersection, lorsque cela est possible, d'un plan avec chaque face du tétraèdre.